

Physik II

Schwingungen

Wellen

Akustik

Optik

Dr. Robert Heß
Lehrbeauftragter an der HAW-Hamburg
Fachbereich Medientechnik

21. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Schwingungen	4
1.1	Definition von Schwingungen	4
1.2	Prinzipielle Arbeitsweise von Schwingungen	4
1.3	Ungedämpfte, harmonische Schwingungen	5
1.3.1	Herleitung ungedämpfter harmonischer Schwingungen	5
1.3.2	Dynamische Verläufe einer harmonischen Schwingung	8
1.3.3	Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen	8
1.4	Gedämpfte, harmonische Schwingungen	9
1.4.1	Herleitung der gedämpften harmonischen Schwingung	9
1.4.2	Diskussion der Ergebnisse	10
1.4.3	Kenngrößen gedämpfter Schwingungen	10
1.5	Erzwungene Schwingung	12
1.5.1	Herleitung der erzwungenen Schwingung	12
1.5.2	Diskussion der Ergebnisse	13
1.6	Überlagerung von Schwingungen	14
1.7	Lissajous-Figuren	16
2	Wellen	17
2.1	Grundlagen	17
2.2	Wellenarten	17
2.3	Grundgleichung einer Welle	17
2.4	Stehende Wellen und Resonanzen	19
2.4.1	Stehende Wellen	20
2.4.2	Resonanzen	21
2.5	Wellenfronten	22
2.5.1	Das Prinzip nach Huygens	22
2.5.2	Reflexion	23
2.5.3	Brechung	23
2.5.4	Beugung	24
2.6	Interferenzen an Spalten	25
2.6.1	Interferenz an einem Spalt	25
2.6.2	Interferenz an mehreren Spalten	26
2.7	Dopplereffekt	28
3	Akustik	30
3.1	Kenngrößen von Schall	30
3.1.1	Allgemeines	30
3.1.2	Physikalische Kenngrößen	31
3.1.3	Physiologische Kenngrößen	33
3.2	Schallerzeugung	35
3.2.1	Mechanische Schallerzeuger	35
3.2.2	Elektrische Schallsender	36
3.2.3	Thermische Schallsender	36
3.3	Töne, Klänge und Geräusche	37
3.3.1	Ton	37
3.3.2	Klang	37
3.3.3	Einteilung des Frequenzbandes in der Musik	37

3.3.4	Geräusch	38
3.4	Schallmessung	39
3.4.1	Messung physikalischer Größen	39
3.4.2	Messung physiologischer Größen	40
3.5	Mehrere Schallquellen	40
3.6	Schallausbreitung	42
3.6.1	Direkter Schall von Schallquellen	42
3.6.2	Reflexion	43
3.6.3	Beugung	43
3.6.4	Brechung	44
3.6.5	Schalldämmung	44
3.6.6	Schallabsorption	44
3.7	Raumakustik	45
3.7.1	Stehende Wellen	45
3.7.2	Resonanzen	45
3.7.3	Echo	46
3.7.4	Hall	46
3.7.5	Absorption	47
3.8	Buchempfehlung und Quellennachweis	49
4	Optik	50
4.1	Licht und Farbe	50
4.1.1	Farben und Wellenlängen	50
4.1.2	Das menschliche Auge	51
4.1.3	Das Farbdreieck	52
4.1.4	Schwarze Körper	52
4.2	Kenngößen von Strahlung und Licht	53
4.2.1	Der Raumwinkel	53
4.2.2	Zusammenhang zwischen physikalischen und physiologischen Kenngößen	54
4.2.3	Physikalische und physiologische Kenngößen	54
4.2.4	Ein Beispiel	56
4.2.5	Der Lambertstrahler	57
4.3	Strahlenoptik	58
4.3.1	Reflexion	58
4.3.2	Brechung	58
4.3.3	Totalreflexion	59
4.3.4	Dispersion	59
4.3.5	Prismen	59
4.4	Linsen	60
4.4.1	Herangehensweise	60
4.4.2	Brechung an geeignet gewölbten Grenzflächen	60
4.4.3	Brechung an sphärischen Grenzflächen	61
4.4.4	Brennweiten von sphärischen Übergängen	62
4.4.5	Dünne Linsen	63
4.4.6	Dicke Linsen	64
4.5	Abbildung	66
4.5.1	Abbildung an einer Linse	66
4.5.2	Abbildungsmaßstab und Vergrößerung	66
4.5.3	Abbildung an zwei dünnen Linsen	67
4.5.4	Abbildung an mehr als zwei Linsen	69
4.5.5	Abbildung an Hohl- und Wölbungsspiegeln	70
4.6	Blenden	71
4.7	Schärfentiefe	72
4.8	Linsenfehler	73
4.8.1	Sphärische Aberration	74
4.8.2	Astigmatismus	74
4.8.3	Chromatische Abberation	75

Kapitel 1

Schwingungen

1.1 Definition von Schwingungen

Allgemein spricht man von einer Schwingung, wenn sich eine physikalische Größe mit der Zeit periodisch ändert. Ob es sich um die Bewegung einer Gitarrensaite, das Schwanken eines Wolkenkratzers, die Trägerfrequenz eines Senders, das Lineal an der Tischkante, das Schaukeln eines Kindes (oder Erwachsenen) handelt, immer haben wir es mit Schwingungen zu tun. Ein Leben ohne Schwingungen wäre undenkbar. (Ein Exkurs in Richtung Schwingungen und Rhythmen im Leben soll hier nicht erfolgen, ist aber zweifelsohne ein interessantes Themengebiet.) Man spricht auch dann von einer Schwingung, wenn sich die Signalgröße, die Amplitude, von Periode zu Periode verändert. Eine angeschlagene Saite schwingt aufgrund von Verlusten mit abnehmender Amplitude; sie ‘klingt aus’. Hier noch einmal zusammengefasst:

Eine Schwingung ist ein zeitlich sich periodisch ändernder Wert einer physikalischen Größe.

1.2 Prinzipielle Arbeitsweise von Schwingungen

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf mechanische Schwingungen. Voraussetzung für eine mechanische Schwingung ist das geeignete Zusammenspiel zwischen Trägheitskraft und Rückstellkraft. Betrachten Sie Abbildung 1.1, in der sich Kugeln an verschiedenen Stellen einer unebenen Landschaft befinden. Im Fall *a*) kann die Kugel seitlich verschoben werden, ohne dass sie in der neuen Position eine Kraft erfährt. Wird die Kugel *b*) seitlich verschoben, so erfährt sie in ihrer neuen Position eine seitliche Kraft, die sie aber nicht in ihre ursprüngliche Position zurückzieht, sondern weiter von ihr wegbringt. Schließlich führt eine seitliche Verschiebung der Kugel *c*) dazu, dass eine Kraft entsteht, die sie in ihre ursprüngliche Lage zurückzieht. Man spricht von einer *Rückstellkraft*.

Was passiert, wenn die Kugel *c*) in Abbildung 1.1 seitlich nach rechts verschoben, und dann losgelassen wird? Wir gehen von einer symmetrischen Mulde aus, und vernachlässigen jegliche Reibungsverluste. Die Zeit wird vom Zeitpunkt des Loslassens gezählt, positive Werte werden nach rechts aufgetragen.

Zum Zeitpunkt null ($t = 0$) ist die Kugel um die Strecke $s(0) = \hat{s}$ von ihrer Ruhelage verschoben, die Geschwindigkeit ist null, $v(0) = 0$, und aufgrund der Rückstellkraft wird die Kugel in Richtung Ruhelage beschleunigt, $a(0) = -\hat{a}$.

Nach einer gewissen Zeit, $t = T/4$, befindet sich die Kugel wieder in ihrer ursprünglichen Ruhelage, $s(T/4) = 0$, aber aufgrund der Beschleunigung durch die Rückstellkraft hat die Kugel eine Geschwindigkeit $v(T/4) = -\hat{v}$ gewonnen, die dafür sorgt, dass die Kugel über die Ruhelage hinauschießt. Die Beschleunigung ist zu diesem Zeitpunkt null, $a(T/4) = 0$.

Sobald sich die Kugel links der Ruhelage befindet, wird sie von der Rückstellkraft gebremst, bis sie schließlich zum Zeitpunkt $T/2$ zur Ruhe gekommen ist, $v(T/2) = 0$. Die Kugel befindet sich jetzt

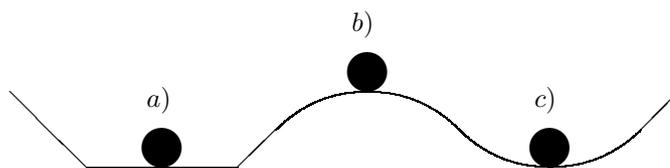


Abbildung 1.1: Nur Kugel *c*) hat die Möglichkeit in Schwingung zu geraten.

Zeitpunkt t	Position $s(t)$	Geschwindigkeit $v(t)$	Beschleunigung $a(t)$	
0	\hat{s}	0	$-\hat{a}$	
$T/4$	0	$-\hat{v}$	0	
$T/2$	$-\hat{s}$	0	\hat{a}	
$3T/4$	0	\hat{v}	0	
T	\hat{s}	0	$-\hat{a}$	

Tabelle 1.1: Phasen einer Schwingung.

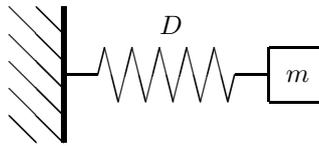


Abbildung 1.2: Prinzipieller Aufbau eines ungedämpften mechanischen Schwingkreises.

um das gleiche Maß links von der Ruhelage, wie sie zuvor rechts von der Ruhelage losgelassen wurde, $s(T/2) = -\hat{s}$. Ebenso führt jetzt die Rückstellkraft zu der gleichen Beschleunigung wie zum Zeitpunkt null, nur in entgegengesetzte Richtung, $a(T/2) = \hat{a}$.

Nach einem weiteren Zeitabschnitt befindet sich die Kugel wieder in ihrer Ruhelage, $s(3 * T/4) = 0$, hat wieder ihre Maximalgeschwindigkeit, $v(3 * T/4) = \hat{v}$ und die Beschleunigung ist null, $a(3 * T/4) = 0$, da keine Rückstellkraft vorliegt.

Schließlich, nach einem weiteren Zeitabschnitt befindet sich die Kugel wieder in ihrer Ausgangsposition, $s(T) = \hat{s}$, hat wieder die Geschwindigkeit null, $v(T) = 0$, und erfährt aufgrund der Rückstellkraft wieder eine Beschleunigung nach links, $a(T) = -\hat{a}$. Nun beginnt der gleiche Ablauf wieder von vorne. Man spricht von einer Periode, und bezeichnet die Dauer einer Periode mit dem Buchstaben T .

Aufgabe 1.1 Nennen Sie fünf Objekte auf Ihrem Weg zur HAW, an denen Sie Schwingungen beobachten.

1.3 Ungedämpfte, harmonische Schwingungen

Ist bei einer Schwingung die Rückstellkraft proportional zur Verschiebung von der Ruhelage, so gleicht der zeitliche Verlauf einer Sinusschwingung und man spricht von einer *harmonischen Schwingung*.

Ein Schwingkreis ohne Verluste schwingt (ohne Antrieb) unendlich lange und ohne Verringerung der Amplitude. Man spricht von der *ungedämpften Schwingung*. Aber auch Schwingkreise, bei denen sich Antrieb und Verluste die Waage halten, werden als ungedämpft bezeichnet. An ungedämpften Schwingungen lassen sich die wesentliche Eigenschaften von Schwingungen gut erläutern.

Es folgt zunächst die mathematische Herleitung der ungedämpften harmonischen Schwingung. Danach werden einige Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen betrachtet.

1.3.1 Herleitung ungedämpfter harmonischer Schwingungen

Für die Herleitung der ungedämpften harmonischen Schwingung betrachten wir einen Schwingkreis bestehend aus einer Masse, m , und einer Feder mit einer Federkonstante D .

Zunächst betrachten wir die Rückstellkraft, welche proportional zur Auslenkung der Feder von der Ruheposition ist. Der Betrag des Faktors zwischen Auslenkung und Rückstellkraft ist die Federkonstante D . Das negative Vorzeichen in der folgenden Gleichung deutet die Krafrichtung entgegengesetzt zur Auslenkung an.

$$F_R = -Ds(t)$$

Wird eine Masse beschleunigt, so wirkt die Trägheitskraft der Beschleunigung entgegen. Der Betrag des Faktors zwischen Beschleunigung und Trägheitskraft ist die Masse m . Die Beschleunigung ist dabei der zweiten Ableitung der Position gleich.

$$F_T = -ma(t) = -ms''(t)$$

Die Summe von Rückstellkraft und Trägheitskraft muss zu allen Zeiten null ergeben.

$$Ds(t) + ms''(t) = 0$$

Wir erhalten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in impliziter Form. Der Einfachheit halber lassen wir die Angabe der Unabhängigen (t) einfach weg.

$$Ds + ms'' = 0 \quad (1.1)$$

Die entstandene Differentialgleichung (1.1) lässt sich mit einer allgemeinen Sinusfunktion lösen. Wir verwenden folgenden Ansatz:

$$s = \hat{s} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.2)$$

Die Amplitude wird durch die Konstante \hat{s} , der Nullphasenwinkel durch φ_0 und die Kreisfrequenz durch ω wiedergegeben. Wir bilden die ersten zwei Ableitungen der Ansatzfunktion:

$$\begin{aligned} s' &= \hat{s}\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ s'' &= -\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Diesen Ansatz setzen wir in die zuvor gewonnene Differentialgleichung ein:

$$D\hat{s} \sin(\omega t + \varphi_0) - m\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Es folgt:

$$D = m\omega^2$$

und schließlich:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (1.3)$$

Die anderen beiden Konstanten der Ansatzfunktion \hat{s} und φ_0 ergeben sich durch die Startbedingungen. Nehmen wir an, die Masse wurde zum Zeitpunkt $t = 0$ um s_0 ausgelenkt und dann losgelassen, so ergeben sich die folgenden Startbedingungen:

$$\begin{aligned} s(0) &= s_0 \\ v(0) &= s'(0) = 0 \end{aligned}$$

Was sich mit $\varphi_0 = \pi/2$ und $\hat{s} = s_0$ lösen lässt. Mit $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ ergibt sich schließlich:

$$s = s_0 \cos(\omega t)$$

Die Rechnung zeigt, dass der gewählte Ansatz (1.2) eine allgemeine Lösung für eine ungedämpfte Schwingung ist. Folgender komplexer Ansatz führt ebenfalls zum Erfolg:

$$s = \hat{s} \exp(i(\omega t + \varphi_0)) \quad (1.4)$$

Bei dieser Variante ist im Ergebnis nur der Realteil von Interesse und spiegelt die Eigenschaft der Schwingung wieder.

Aufgabe 1.2 Lösen Sie die Differentialgleichung im Abschnitt 1.3.1 mit dem Ansatz $s = \hat{s} \exp(i(\omega t + \varphi_0))$.

Größe	allgemein	harmonische ungedämpfte Schwingung
$s(t)$	-	$\hat{s} \sin(\omega t)$
$v(t)$	$s'(t)$	$\hat{v} \cos(\omega t) = \hat{s}\omega \cos(\omega t)$
$p(t)$	$mv(t)$	$\hat{p} \cos(\omega t) = m\hat{s}\omega \cos(\omega t)$
$a(t)$	$v'(t)$	$-\hat{a} \sin(\omega t) = -\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t)$
$F_R(t)$	$-Ds(t)$	$\hat{F}_R \sin(\omega t) = D\hat{s} \sin(\omega t)$
$F_T(t)$	$-ma(t)$	$\hat{F}_T \sin(\omega t) = m\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t)$
$E_P(t)$	$\frac{D}{2}s^2(t)$	$\frac{D}{2}\hat{s}^2 \sin^2(\omega t)$
$E_K(t)$	$\frac{m}{2}v^2(t)$	$\frac{m}{2}\hat{s}^2\omega^2 \cos^2(\omega t)$
$P_P(t)$	$E'_P(t)$	$\frac{D}{2}\hat{s}^2\omega \sin(2\omega t)$
$P_K(t)$	$E'_K(t)$	$-\frac{m}{2}\hat{s}^2\omega^3 \sin(2\omega t)$

Tabelle 1.2: Formelmäßiger Zusammenhang einiger Größen bei harmonischen Schwingungen.

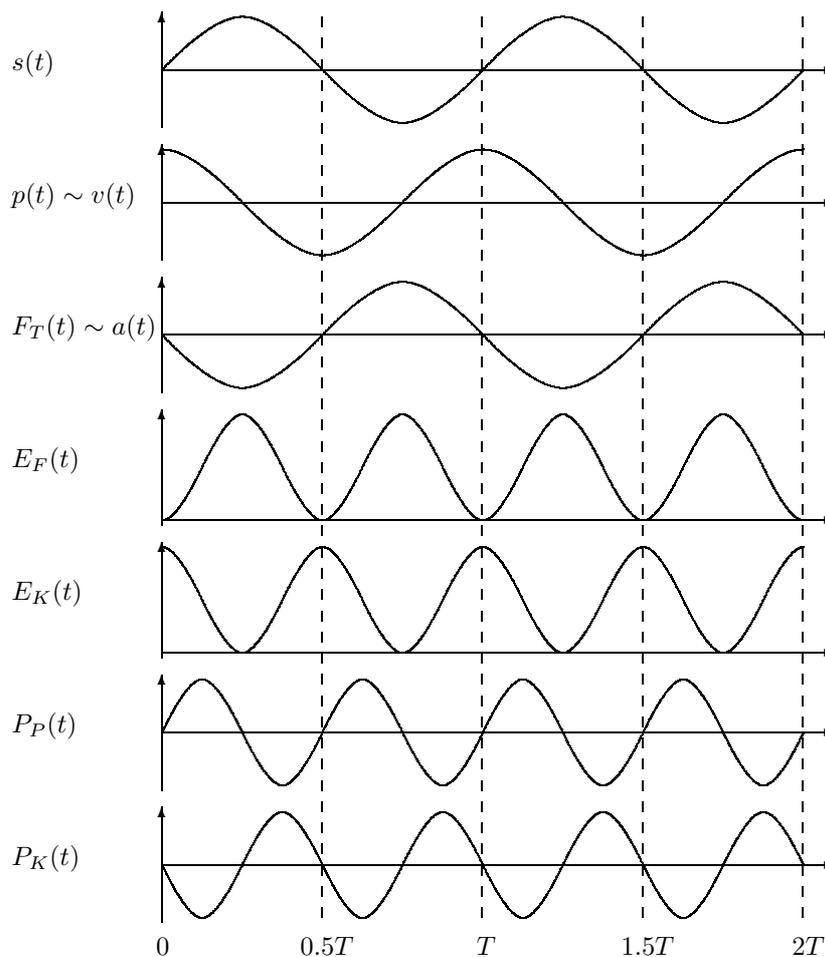


Abbildung 1.3: Dynamische Verläufe einiger Größen einer harmonischen Schwingung.

1.3.2 Dynamische Verläufe einer harmonischen Schwingung

Ein schwingender Körper hat eine Position, $s(t)$, eine Geschwindigkeit, $v(t)$, und wird beschleunigt, $a(t)$. Er hat eine kinetische Energie, $E_K(t)$, einen Impuls, $p(t)$, und er erfährt die Übertragung von Energie, $P(t)$. Hinzu kommt die Rückstellkraft der Feder, $F_R(t)$, und die potentielle Energie der Feder, $E_F(t)$.

Alle diese Größen sind in Abbildung 1.3 zusammengefasst und zeitlich dargestellt. Hervorzuheben ist das Zusammenspiel zwischen kinetischer Energie der schwingenden Masse und der potentiellen Energie der Feder. Die Summe beider Energien ist konstant, es findet aber ein reger Energietransfer zwischen Masse und Feder statt, was durch die Leistungsverläufe P_K und P_F deutlich wird.

Aufgabe 1.3 Bestimmen Sie die Schwingfrequenz in Hertz für einen Schwingkreis mit einer Masse von 100 g und einer Feder mit Federkonstante 10 N/m.

Aufgabe 1.4 Ein Federpendel schwingt mit einer Frequenz von 100 Hz. Auf welchen Wert ändert sich die Frequenz bei einem Massenzuwachs um 56,25 %?

1.3.3 Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen

Ausgehend von dem Lösungsansatz in Abschnitt 1.3.1, $s = \hat{s} \sin(\omega t + \varphi_0)$, ergeben sich folgende Kenngrößen:

Periode. Die Periode, T , gemessen in s, ist die Zeit, die für einen Schwingungszyklus benötigt wird.

Frequenz. Die Frequenz, f , gemessen in $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$, ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit. Die Frequenz ist der Kehrwert der Periode:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.5)$$

Kreisfrequenz. Die Kreisfrequenz, ω , gemessen in s^{-1} , ist proportional zur Frequenz und misst den Winkel in Bogenmaß, den eine Sinusschwingung pro Zeiteinheit zurücklegt. Es ergibt sich der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.6)$$

Nullphasenwinkel. Der Nullphasenwinkel, φ_0 , bezeichnet die Phase der Sinusschwingung zum Zeitpunkt null.

Für alle dynamischen Größen gibt es folgende charakteristische Kennzahlen:

Spitzen-, bzw. Scheitelwert. Der Spitzen-, bzw. Scheitelwert, \hat{x} , gibt den maximal auftretenden Wert an. Bei Signalen, die um die Nullachse herum Schwingen, ist damit der maximale Betrag gemeint.

Arithmetischer Mittelwert. Der arithmetische Mittelwert, oder einfach nur Mittelwert, \bar{x} , steht für den zeitlichen Mittelwert einer Schwingung:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.7)$$

Strenggenommen ergibt sich für symmetrisch um die Nullachse oszillierende Signale bei einer vollen Periode, bzw. bei einem ganzzahligen Vielfachen einer Periode immer der Wert null. Deshalb ist häufig mit Mittelwert das Integral über den Betrag einer Schwingung gemeint:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1.8)$$

Bezogen auf eine Sinusschwingung ergibt sich:

$$\bar{x}_{\sin} = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x} \sin(\omega t)| dt = \frac{2\hat{x}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = \frac{2\hat{x}}{\pi} = 0,637\hat{x}$$

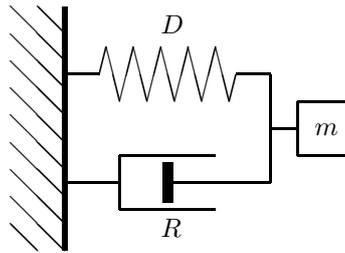


Abbildung 1.4: Prinzipieller Aufbau eines gedämpften mechanischen Schwingkreises.

Quadratischer Mittelwert. Der quadratische Mittelwert, \tilde{a} , auch Effektivwert oder RMS-Wert (root mean square) genannt, ist im Bezug auf Energie und Leistungsverlusten von Schwingungen von Bedeutung. Der englische Name deutet die Berechnung (Wurzel, Mittelwert, Quadrat) an:

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.9)$$

Bezogen auf eine Sinusschwingung ergibt sich:

$$\tilde{x}_{\sin} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{x}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} = 0,707\hat{x}$$

Formfaktor. Der Formfaktor, F_f , bildet das Verhältnis zwischen quadratischen und arithmetischen Mittelwert. Bei Sinusschwingungen ergibt sich ein Wert von 1,11.

Scheitelfaktor. Der Scheitelfaktor, F_s , ist das Verhältnis von Scheitelwert zu quadratischen Mittelwert und hat bei Sinusschwingungen den Wert 1,41.

Aufgabe 1.5 Unsere Netzspannung beträgt 230 V effektiv (Sinus). Berechnen Sie Scheitelwert und Mittelwert.

Aufgabe 1.6 Eine 1 kHz Sinusschallwelle habe den Scheitelwert 10 nm. Bestimmen Sie die Scheitelwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Wie groß sind die Mittel- und Effektivwerte von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung?

1.4 Gedämpfte, harmonische Schwingungen

Unsere bisherige Betrachtung galt den ungedämpften Schwingungen. Nun sind aber in der Realität Schwingkreise mit Verlusten behaftet, was ohne Antrieb zum Abklingen der Amplitude führt. In diesem Abschnitt gehen wir näher auf diese gedämpften Schwingkreise ein.

1.4.1 Herleitung der gedämpften harmonischen Schwingung

Wir betrachten einen mechanischen Schwingkreis mit den Elementen Masse, Schwingungsdämpfer (im Volksmund *Stoßdämpfer*) und Feder. Das Verhalten von Feder (Rückstellkraft, F_R) und Masse (Trägheitskraft, F_T) haben wir bereits in Abschnitt 1.3.1 kennengelernt. Neu ist die Reibungs-, bzw. Verlustkraft, F_V , erzeugt durch den Schwingungsdämpfer, welche proportional zur Geschwindigkeit ist. Der Betrag des Faktors zwischen Verlustkraft und Geschwindigkeit ist die Reibungskonstante, R . Für die Herleitung verwenden wir aber die Dämpfungskonstante, k , welche dem Kehrwert der Reibungskonstante entspricht.

Die drei Kräfte müssen laut Newton in Summe null ergeben:

$$F_T + F_V + F_R = 0$$

Mit

$$F_T = -ma(t)$$

$$F_V = -\frac{v(t)}{R} = -kv(t)$$

$$F_R = -Ds(t)$$

folgt

$$-ma(t) - kv(t) - Ds(t) = 0$$

Mit $a(t)$ als der zweiten, und $v(t)$ als der ersten Ableitung von $s(t)$ folgt schließlich die Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung in impliziter Form:

$$ms'' + ks' + Ds = 0 \quad (1.10)$$

Als Ansatz wählen wir die komplexe Frequenz $e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ und versehen diese mit einem Abklingfaktor $e^{-\delta t}$ mit der Abklingkonstante δ .

$$s = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0)} e^{-\delta t} = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0) - \delta t} \quad (1.11)$$

$$s' = \hat{s}(i\omega - \delta) e^{i(\omega t + \varphi_0) - \delta t} = (i\omega - \delta)s$$

$$s'' = \hat{s}(i\omega - \delta)^2 e^{i(\omega t + \varphi_0) - \delta t} = (i\omega - \delta)^2 s$$

In die Differentialgleichung (1.10) eingesetzt folgt:

$$m(i\omega - \delta)^2 s + k(i\omega - \delta)s + Ds = 0$$

Nach Trennung des Real- und Imaginärteils lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad (1.12)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \quad (1.13)$$

Die gefundene Lösung ergibt nur dann ein sinnvolles Ergebnis, wenn der Betrag unter der Wurzel nicht negativ ist. Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so muss ein anderer geeigneter Ansatz gewählt werden:

$$s = x_1 e^{-\alpha_1 t} + x_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (1.14)$$

Eingesetzt in die DGL (1.10) ergibt sich:

$$\alpha_{1,2} = \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m}} \quad (1.15)$$

Diese Lösung hat in der Wurzel den gleichen Ausdruck wie (1.13) nur mit umgekehrtem Vorzeichen. Sie stellt damit eine sinnvolle Ergänzung dar.

1.4.2 Diskussion der Ergebnisse

Die erste Lösung besteht aus einem Term der Oszilliert, und einem anderen, der die Dämpfung verursacht, siehe Abbildung 1.5. Die Amplitude nimmt von Schwingung zu Schwingung um einen konstanten Faktor, dem Dämpfungsverhältnis, K , ab. Auch nach einer langen Zeit kann rein rechnerisch noch eine Schwingung beobachtet werden. Bei Messungen wird aber nach einer Weile die Schwingung im allgemeinen Rauschen untergehen.

Wird der Schwingkreis stark gedämpft, so bleibt ein Schwingen aus, siehe Abbildung 1.6. Je nach Anfangsbedingungen kann maximal ein Überschwingen beobachtet werden. Der Fall tritt ein, wenn der schwingenden Masse eine Anfangsgeschwindigkeit zugefügt wird, siehe untere Kurve in Abbildung 1.6.

1.4.3 Kenngrößen gedämpfter Schwingungen

Bei den ungedämpften Schwingungen in Abschnitt 1.3.3 haben wir bereits einige Kenngrößen von Schwingungen kennen gelernt. Für gedämpfte Schwingungen gibt es noch weitere:

Dämpfungskonstante. Die Dämpfungskonstante, k , gemessen in Ns/m ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Dämpfungs-, bzw. Verlustkraft, F_V , und der negativen Geschwindigkeit, $v(t)$. Mit $F_V = -kv(t)$ folgt:

$$k = \frac{F_V}{-v(t)} = \frac{1}{R} \quad (1.16)$$

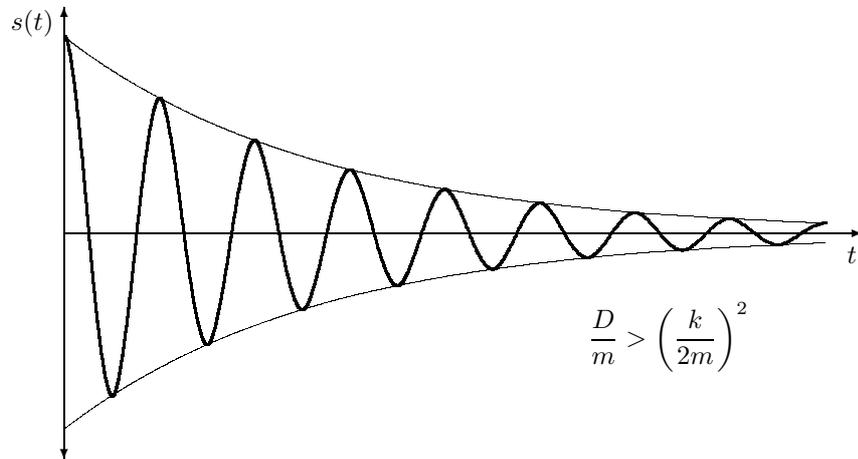


Abbildung 1.5: Gedämpfte Schwingung mit wenig Verlusten.

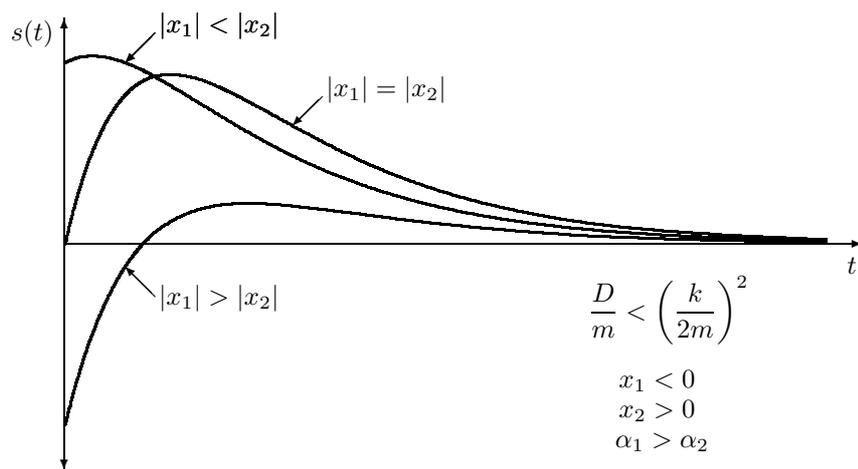


Abbildung 1.6: Gedämpfte Schwingung, mit hohen Verlusten.

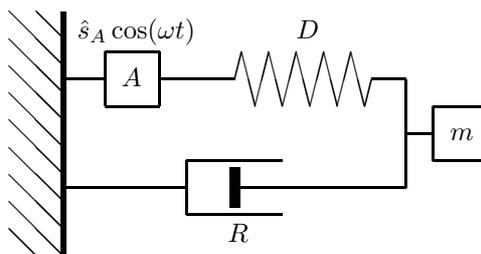


Abbildung 1.7: Prinzipieller Aufbau eines gedämpften Schwingkreises mit Antrieb.

Abklingkonstante. Die Abklingkonstante, δ , gemessen in s^{-1} , ist der Koeffizient der Exponentialfunktion, welche das Abklingverhalten der Schwingung widerspiegelt, und gibt die Geschwindigkeit des Abklingvorganges an.

$$s(t) = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0) - \delta t}$$

Mit \hat{s}_a und \hat{s}_b als die Scheitelwerte zu den Zeitpunkten t_a und t_b folgt:

$$\frac{\hat{s}_b}{\hat{s}_a} = e^{-\delta(t_b - t_a)}$$

$$\delta = \frac{1}{t_b - t_a} \ln \frac{\hat{s}_a}{\hat{s}_b} \quad (1.17)$$

Dämpfungsverhältnis. Das Dämpfungsverhältnis, K , ist der Faktor, um den die Amplitude einer gedämpften Schwingung innerhalb einer Periode fällt.

$$K = \frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}} \quad (1.18)$$

Dämpfungsgrad. Der Dämpfungsgrad, ϑ , ist ein Maß für die Abklingkonstante, δ , relativ zur ungedämpften Kreisfrequenz, ω_0 .

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (1.19)$$

Aufgabe 1.7 Die aufeinander folgenden positiven Amplituden einer 50 Hz-Schwingung haben die Größen 100, 88, 77, 68, 60, ... Wie groß sind Abklingkonstante und Dämpfungsgrad? Wie groß ist die Amplitude nach 1 s?

1.5 Erzwungene Schwingung

1.5.1 Herleitung der erzwungenen Schwingung

Als nächstes wollen wir eine gedämpfte Schwingung mit Antrieb betrachten. Wieder finden wir die drei Elemente Feder, Schwingungsdämpfer und Masse aus Abschnitt 1.4.1. Hinzu kommt ein Antrieb, der zwischen Feder und Wand eingefügt ist. Er dehnt sich zyklisch mit der Funktion $s_A = \hat{s}_A \cos(\omega t)$ und beeinflusst die Rückstellkraft, F_R .

Wir nehmen die Differentialgleichung aus Abschnitt 1.4.1 und fügen den Antrieb ein.

$$ms'' + ks' + D(s - s_A) = 0$$

$$ms'' + ks' + Ds = Ds_A$$

Wir ersetzen Ds_A durch \hat{F}_A (Scheitelwert der Antriebskraft) und die Cosinusfunktion, $\cos(\omega t)$, durch die komplexe Frequenz $e^{i\omega t}$. Es ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$ms'' + ks' + Ds = \hat{F}_A e^{i\omega t} \quad (1.20)$$

Uns interessiert nur der eingeschwungene Zustand dieser inhomogenen Differentialgleichung, und wählen deshalb den Ansatz für eine ungedämpfte Schwingung. Da das System ausschließlich mit der Frequenz ω angeregt wird, kann es auch nur mit dieser Frequenz schwingen.

$$s = \hat{s} e^{i(\omega t - \varphi_0)} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}s' &= i\hat{s}\omega e^{i(\omega t - \varphi_0)} \\ s'' &= -\hat{s}\omega^2 e^{i(\omega t - \varphi_0)}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}-m\hat{s}\omega^2 e^{i(\omega t - \varphi_0)} + ik\hat{s}\omega e^{i(\omega t - \varphi_0)} + D\hat{s}e^{i(\omega t - \varphi_0)} &= \hat{F}_A e^{i\omega t} \\ -m\omega^2 + ik\omega + D &= \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} e^{i\varphi_0}\end{aligned}$$

Mit $e^{i\varphi_0} = \cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0$ folgt:

$$\frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) = -m\omega^2 + ik\omega + D$$

$$\text{Re:} \quad \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \cos \varphi_0 = D - m\omega^2$$

$$\text{Im:} \quad \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \sin \varphi_0 = k\omega$$

Teilt man den Imaginärteil durch den Realteil und ersetzt $\frac{D}{m}$ durch ω_0^2 (siehe Abschnitt 1.3.1), so ergibt sich für den Nullphasenwinkel:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\omega k}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.22)$$

Zur Ermittlung des Scheitelwerts wird der Realteil weiter bearbeitet:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \cos \varphi_0 &= D - m\omega^2 \\ \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} &= m(\omega_0^2 - \omega^2) \\ \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} &= m(\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{1 + \frac{k^2 \omega^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \\ \hat{s} &= \frac{\hat{F}_A}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}\end{aligned} \quad (1.23)$$

1.5.2 Diskussion der Ergebnisse

Aus Symmetriegründen betrachten wir zunächst den Scheitelwert der Geschwindigkeit, \hat{v} , der sich aus dem Produkt von Scheitelwert der Position, \hat{s} , und der Kreisfrequenz, ω , ergibt:

$$\begin{aligned}v(t) = s'(t) &= \frac{d}{dt} \hat{s} \sin(\omega t) = \hat{s} \omega \cos(\omega t) \\ \hat{v} = \hat{s} \omega &= \frac{\hat{F}_A \omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}\end{aligned} \quad (1.24)$$

In Abbildung 1.8 ist links der Scheitelwert der Geschwindigkeit als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen, k , aufgetragen. Für sehr geringe und sehr hohe Frequenzen geht die Geschwindigkeit gegen null. Irgendwo im mittleren Frequenzbereich befindet sich für die Geschwindigkeit ein Maximum. Wir suchen dieses Maximum durch Nullsetzung der ersten Ableitung:

$$\frac{d\hat{v}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{\hat{F}_A \omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}} = 0 \quad (1.25)$$

Die maximale Geschwindigkeit wird bei der Frequenz $\omega = \omega_0$ erreicht. An diesem Punkt befindet sich das System in *Resonanz*. Abhängig von der Dämpfung ist die Resonanz unterschiedlich stark ausgeprägt. Drei Fälle sind links in Abbildung 1.8 dargestellt.

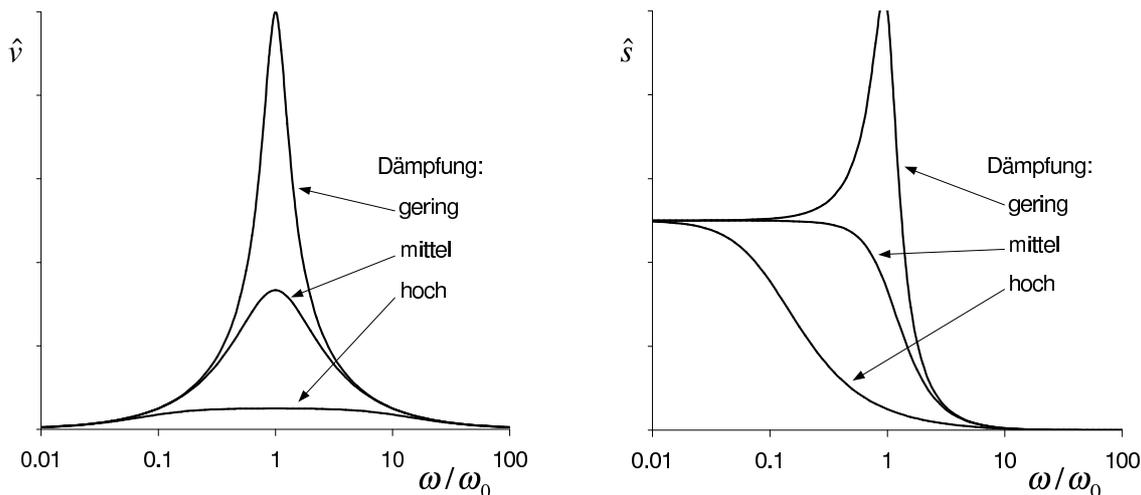


Abbildung 1.8: Scheitelwert der Geschwindigkeit, \hat{v} , und der Position, \hat{s} , als Funktion der Kreisfrequenz.

Der Scheitelwert der Position zeigt einen etwas anderen Verlauf, siehe Abbildung 1.8 rechts. Bei niedrigen Frequenzen gleicht sich der Scheitelwert der Position der Amplitude der Anregung, \hat{s}_A , an. Im Mittelbereich kommt es nur bei geringer Dämpfung zu einer Überhöhung. Bei hohen Frequenzen fällt die Amplitude schnell ab. Findet eine Überhöhung statt, so liegt das Maximum etwas neben der ungedämpften Kreisfrequenz, ω_0 :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2m^2}} \quad (1.26)$$

1.6 Überlagerung von Schwingungen

Die Schwingungen, die wir um uns herum beobachten, sind häufig eine Überlagerung von mehreren Teil-schwingungen. Die Hand eines winkenden Kindes, das auf einer Schaukel sitzt, erfährt eine überlagerte Schwingung: Einerseits wird die Hand durch die Muskeln des Kindes in Bewegung gebracht, zum anderen übt das ganze Kind eine Pendelschwingung aus.

Beim Resonanzboden meiner Gitarre überlagern sich bis zu sechs Teilschwingungen: Jede der sechs Saiten überträgt eine Schwingung auf den Resonanzboden. Dabei werden die einzelnen Töne vom Resonanzboden nicht örtlich getrennt wiedergegeben, sondern er schwingt mit der Summe aller Teilschwingungen.

Im Gegenzug ist es möglich, jede beliebige Kurvenform einer Schwingung in Teilschwingungen zu zerlegen. Dabei können für die Teilschwingungen verschiedene Kurvenformen gewählt werden.

Zum Beispiel wird beim Digitalisieren eines analogen Signals der Verlauf des Eingangssignals in eine Summe von einzelnen Rechteckimpulsen zerlegt, deren Höhen als Zahlen im Speicher abgelegt werden. Werden alle Rechteckimpulse später wieder aufaddiert, so ergibt sich in guter Näherung das ursprüngliche analoge Signal. (Will man das Digitalisieren mathematisch ausdrücken und verarbeiten, so verwendet man statt der Rechteckimpulse die unendlich hohen und unendlich schmalen Dirac-Impulse.)

Jede Kurvenform einer Schwingung kann in eine Summe von Sinuskurven zerlegt werden. Hat die Schwingung eine periodische Kurvenform mit der Frequenz f , so kann die Schwingung in Sinuskurven mit den Frequenzen f , $2f$, $3f$, $4f$ etc. zerlegt werden. Die einzelnen Sinuskurven unterscheiden sich in *Frequenz*, *Amplitude* und *Nullphasenwinkel*. Aufgrund der diskreten Frequenzen ergibt sich ein diskretes Frequenzspektrum. Das mathematische Verfahren zur Zerlegung einer periodischen Schwingung in Sinuskurven ist die Fourier-Analyse, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

Je nach Kurvenform der Schwingung werden mehr oder weniger Sinuskurven benötigt. Normalerweise legt man ein Abbruchkriterium fest, nach dem entschieden wird, wie viele Sinuskurven addiert werden.

In Abbildung 1.10 wird im ersten Diagramm die Summe von zwei Sinuskurven gezeigt. Die anderen drei Diagramme zeigen typische oberwellenreiche Kurvenformen (Dreieck, Rechteck und Sägezahn) und deren Näherungen. Die Zahlen in der Legende geben jeweils die Anzahl von Sinuskurven an aus denen sich die Kurve zusammensetzt.

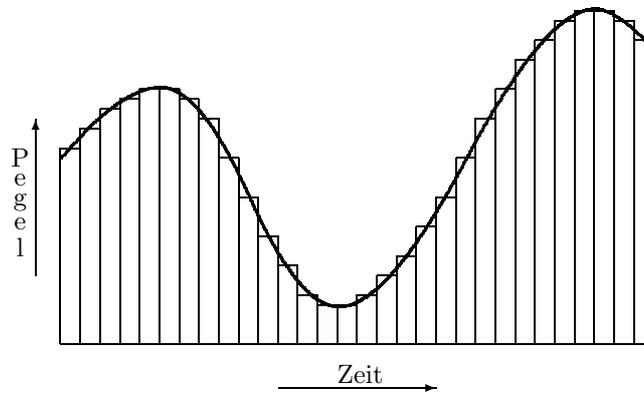


Abbildung 1.9: Zerlegung eines analogen Signals in eine Serie von Rechteckimpulsen.

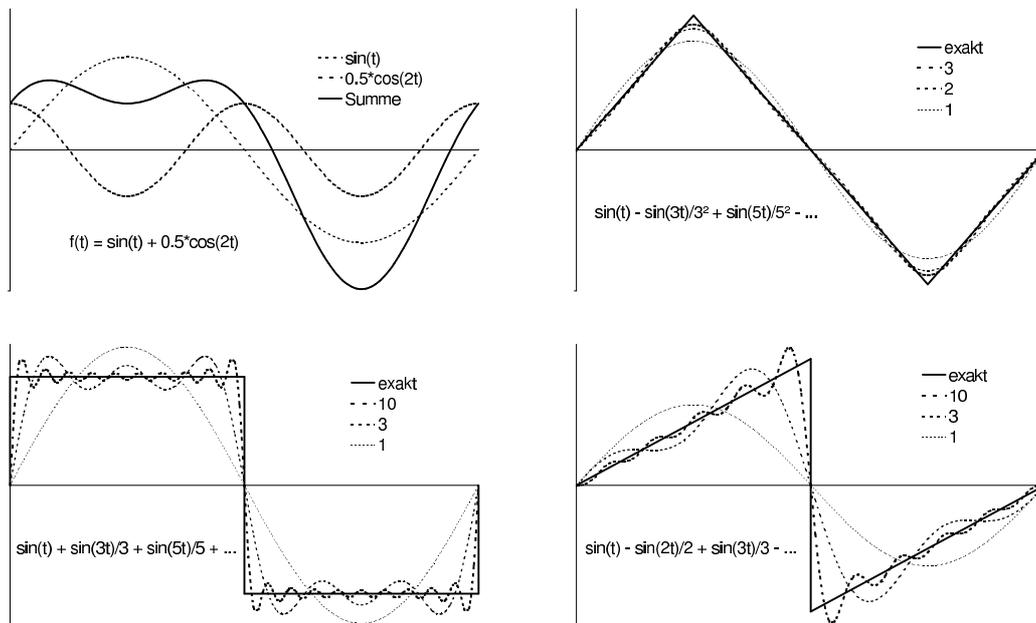


Abbildung 1.10: Einige Beispiele von addierten Teilschwingungen.

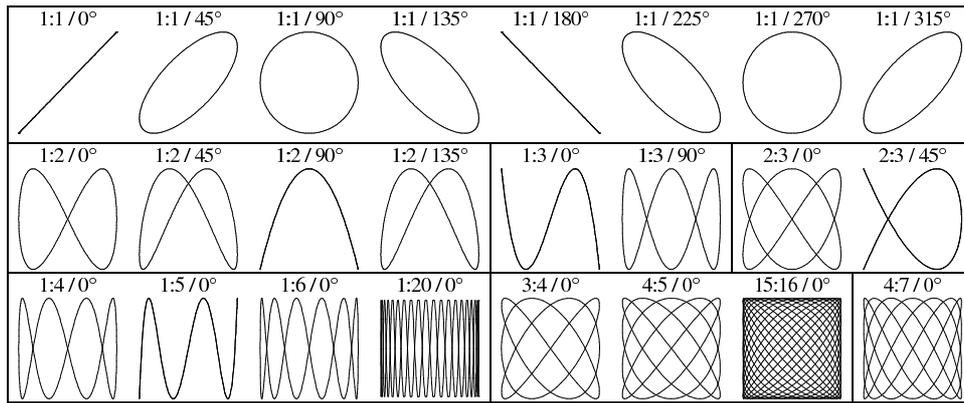


Abbildung 1.11: Beispiele einiger Lissajous-Figuren mit der Angabe $f_x:f_y/\varphi_y$

Was bei der Zerlegung von Schwingungen gilt, kann auch für die Addition gesagt werden: Mehrere Schwingungen können beliebig addiert werden und ergeben eine neue Schwingung mit einer geänderten Kurvenform. So schwingt z. B. die Membran eines Lautsprechers mit der Summe aller Instrumente, die sie übertragen soll.

1.7 Lissajous-Figuren

Im letzten Abschnitt haben wir uns mit der Addition von Teilschwingungen beschäftigt. Dabei sind wir stillschweigend davon ausgegangen, dass der Ausschlag aller beteiligten Schwingungen in die gleiche Richtung zeigt. Jede Teilschwingung schwingt nur in eine Richtung, und da sie alle in dieselbe Richtung zeigen, schwingt auch die Summe nur in eine Richtung.

Nun können zwei Signale auch in unterschiedliche Richtungen schwingen. Ein besonderer Fall tritt dann ein, wenn zwei Teilschwingungen senkrecht zueinander schwingen. Stehen die Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis, so entstehen die sogenannten Lissajous-Figuren.

Zur Entstehung der Lissajous-Figuren stelle man sich einen Lichtpunkt vor, der in vertikaler und horizontaler Richtung unterschiedlich in Schwingung versetzt wird. Beide Teilschwingungen haben eine *Amplitude*, eine *Frequenz* und einen *Nullphasenwinkel*.

Wird nun der Lichtpunkt gemäß den angegebenen Gleichungen in horizontaler und vertikaler Richtung bewegt, so ergibt sich ein zweidimensionales Muster. Stehen die Koeffizienten der Teilschwingungen in einem geeigneten Verhältnis, so zeichnet der Lichtpunkt eine Lissajous-Figur.

Bei den Beispielen in Abbildung 1.11 sind die Amplituden der Teilschwingungen gleich, und der Nullphasenwinkel der x -Teilschwingung ist null. Angegeben ist das Verhältnis der Frequenzen sowie der Nullphasenwinkel der y -Teilschwingung ($f_x : f_y/\varphi_y$). Die x -Komponente ist horizontal, die y -Komponente vertikal aufgetragen.

Aufgabe 1.8 Skizzieren Sie die Lissajous-Figuren folgender senkrecht zueinander stehenden Schwingungen: a) $x = \sin \omega t$ und $y = \cos 2\omega t$, b) $x = \sin \omega t$ und $y = \sin 2\omega t$, c) $x = \sin \omega t$ und $y = \sin 3\omega t$

Aufgabe 1.9 In meinen Wohnzimmerlautsprechern befinden sich Tieftonchassis mit folgenden Angaben: Nachgiebigkeit, $C_{ms} = 1,23 \text{ mm/N}$; Schwingende Masse, $m = 13,5 \text{ g}$. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz des freien (nicht eingebauten) Chassis.

Kapitel 2

Wellen

2.1 Grundlagen

Im Kapitel Schwingungen haben wir uns mit einzelnen unabhängigen Schwingkreisen/Oszillatoren beschäftigt. Eine Welle entsteht, wenn mehrere Oszillatoren miteinander gekoppelt sind (siehe Abbildung 2.1).

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein Seil, welches zwischen zwei festen Wänden gespannt ist (siehe Abbildung 2.2). Wir nehmen an, dass unser System keine Verluste aufweist, und schlagen kurz mit einem harten Gegenstand an einer beliebige Stelle auf das Seil. Die anfängliche Delle teilt sich auf, und wandert zu gleichen Teilen auseinander. Erreicht eine Welle die Wand, so wird sie reflektiert und wandert mit gleicher Geschwindigkeit zurück. Bewegen sich beide Wellen aufeinander zu, so kreuzen sie sich, ohne einander zu behindern. (Das gilt bei relativ kleinen Auslenkungen.) Nach einer Weile (bei $t = 10$) nimmt unser System wieder den Anfangszustand (direkt nach dem Schlag) ein.

2.2 Wellenarten

In Abbildung 2.3 sind die wichtigsten Wellenarten zusammengefasst.

Je nach Beschaffenheit des Wellenträgers werden *lineare* (Feder, Seil, Saite), *flächenhafte* (Membran, Oberfläche) und *räumliche* (Schall, Licht) Wellen unterschieden.

Aufgabe 2.1 Welche Wellenart erzeugt ein Lautsprecher? Mit welcher Wellenart schwingt eine Brücke?

2.3 Grundgleichung einer Welle

Eine Welle ist eine Funktion der Zeit und des Ortes. Wir betrachten eine ebene Sinuswelle, die sich in x -Richtung ausbreitet:

$$y = y(x, t) = \hat{y} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \hat{y} \sin(\omega t - kx) \quad (2.1)$$

Es ergeben sich folgende Größen:

Periode. Die Periode, T , gemessen in s, gibt die (zeitliche) Dauer einer Welle an.

Frequenz. Die Frequenz, f , gemessen in Hz oder 1/s, gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit wieder. Sie entspricht dem Kehrwert der Periode, T .

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.2)$$

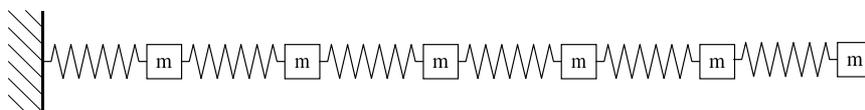


Abbildung 2.1: Für eine Welle sind eine Reihe gekoppelter Oszillatoren nötig.

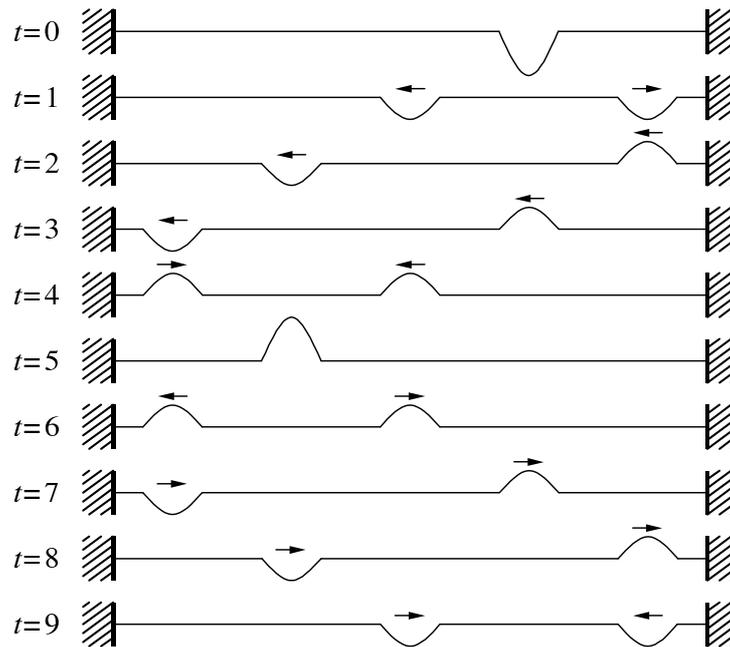


Abbildung 2.2: Bewegung einer Welle auf einem gespannten Seil.

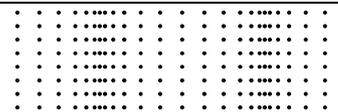
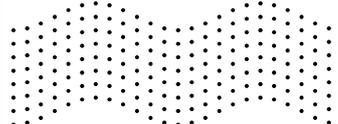
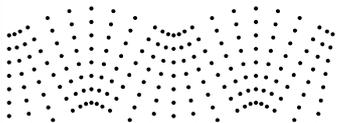
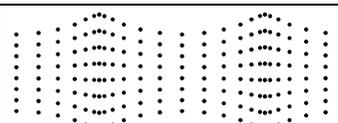
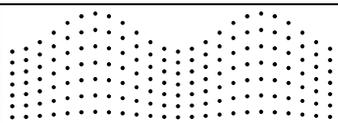
Wellenart	Wellenbezeichnung	Beispiele
	Longitudinalwelle oder Längs-, bzw. Dichtewelle	ebene Schallwellen in Gasen oder Flüssigkeiten
	Transversalwellen oder Quer-, bzw. Schubwelle	Schallwelle in festen Körpern
	Biegewelle (überwiegend transversal)	Schallwelle in begrenzten festen Körpern wie Platten
	Dehnwelle (überwiegend longitudinal)	Schallwelle in begrenzten festen Körpern wie Stangen
	Oberflächenwelle oder Rayleighwelle (transversal)	Schallwellen an Grenzflächen verschiedener Medien

Abbildung 2.3: Zusammenfassung der wichtigsten Wellenarten.

Kreisfrequenz. Die Kreisfrequenz, ω , gemessen in 1/s (nicht in Hz!), ist der Winkel, den die Sinusfunktion pro Zeit durchläuft.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2.3)$$

Wellenlänge. Die Wellenlänge, λ , gemessen in m, steht für die (örtliche) Länge einer Welle. (Sie stellt das örtliche Gegenstück der Periode, T , dar.)

Ortsfrequenz. Die Ortsfrequenz, gemessen in 1/m, gibt die Anzahl von Wellen pro Strecke wieder. (Sie stellt das örtliche Gegenstück zur Frequenz, f , dar, und ist hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.)

Wellenzahl. Die Wellenzahl, k , gemessen in 1/m, ist der Winkel, den die Sinuswelle pro Strecke durchläuft.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4)$$

(Die Wellenzahl ist das örtliche Gegenstück zur Kreisfrequenz, ω .)

Wellengeschwindigkeit. Eine weitere wichtige Größe ist die Wellengeschwindigkeit, c , gemessen in m/s, welche die Geschwindigkeit der Welle im Medium wiedergibt.

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (2.5)$$

Es folgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

Die Wellengeschwindigkeit stellt somit das Bindeglied zwischen zeitlicher und örtlicher Schwingung dar. Die Wellengeschwindigkeit von Licht in Vakuum beträgt $2,99 \cdot 10^8$ m/s, die von Schall in Luft bei 20°C beträgt 343 m/s.

Die Wellengeschwindigkeit kann deutlich höher als die Bewegungsgeschwindigkeit des Mediums sein. Beispiel: Ein elektrisches Signal in einem Kabel umrundet die Erde pro Sekunde ca. siebenmal, während die Trägerelctronen, wären sie sichtbar groß, ohne Probleme mit dem bloßen Auge verfolgt werden könnten. Dieser Zusammenhang kann gut mit einem Rohr voller Murmeln verdeutlicht werden: Wird vorne eine Murmel hineingesteckt, purzelt am anderen Ende sofort eine heraus, während jede einzelne Murmel nur um eine Position verschoben wurde.

Aufgabe 2.2 Welche Frequenz hat eine Welle, die in 12 s eine Strecke von 7,5 Wellenlängen zurücklegt?

Aufgabe 2.3 Welche Frequenz und Schwingungsdauer hat eine Radarwelle mit 12 cm Wellenlänge?

Aufgabe 2.4 Die Rille einer Schallplatte (LP) hat in der Mitte einen Durchmesser von etwa 12 cm, und dreht sich mit $33\frac{1}{3}$ Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist die Wellenlänge, λ , bei der maximalen Sinusfrequenz von 16 kHz?

2.4 Stehende Wellen und Resonanzen

Obwohl sich eine Welle im Raum ausbreitet, können häufig *stehende Wellen* beobachtet werden: Das Medium schwingt lokal, und es kann keine Ausbreitungsrichtung wahrgenommen werden. Dahinter verbirgt sich eine Überlagerung von mindestens zwei Wellen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung.

Als Beispiel betrachten wir ein Seil, das auf einer Seite an einem Pflock festgebunden ist, und dessen anderes Ende Sie in Ihrer Hand halten. Durch eine periodische Handbewegung quer zum Seil (transversal) senden Sie eine Welle Richtung Pflock. Was Sie nun beobachten ist nicht so sehr eine sich ausbreitende, sondern eine stehende Welle. Mit etwas Geschick gelingt es Ihnen, das Seil mit weiteren Knotenpunkten zum Schwingen zu bringen. (Ein Knotenpunkt befindet sich aufgrund des Aufbaus immer beim Pflock.)

Stehen Spannung des Seils und Frequenz der Anregung durch Ihre Hand in einem günstigen Verhältnis, so kommt das System in *Resonanz*. Das merken Sie dadurch, dass Sie mit relativ geringer Bewegung einen großen Ausschlag des Seils erzielen.

In den folgenden zwei Abschnitten gehen wir zunächst auf das grundsätzliche Phänomen von stehenden Wellen ein, bevor wir dann den speziellen Fall von Resonanzen betrachten.



Abbildung 2.4: Stehende Welle auf einem Seil mit zwei extra Knotenpunkten.

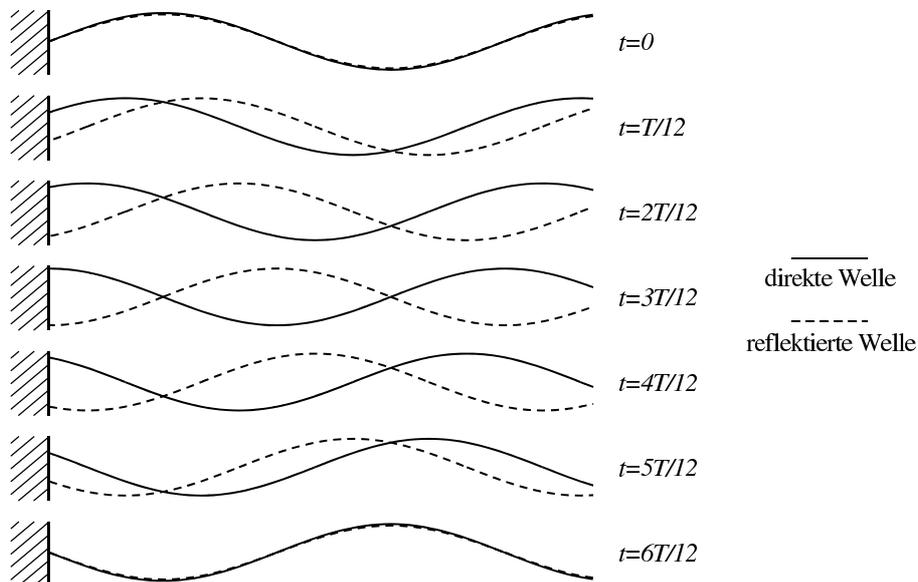


Abbildung 2.5: Direkte und reflektierte Welle zu unterschiedlichen Zeiten.

2.4.1 Stehende Wellen

Zur Veranschaulichung betrachten wir das bereits eingeführte Seil. Wir nehmen an, dass am Pflöck alle Wellen reflektiert werden. Das andere Ende, von dem die Wellen ausgesendet werden, ist so befestigt, dass alle ankommenden Wellen vollständig absorbiert werden und somit keine Reflexion stattfindet.

An der Stelle, wo das Seil am Pflöck befestigt ist, findet keine Bewegung statt. Das heißt, die Summe von direkter und reflektierter Welle muss hier immer null ergeben. Daraus ergibt sich die Phasenlage der reflektierten Welle.

In Abbildung 2.5 ist eine direkte und eine reflektierte Welle zu unterschiedlichen Zeiten dargestellt. Die direkte Welle wird rechts ausgesendet und bewegt sich nach links zum fest montierten Ende des Seils. Dort wird die Welle reflektiert, bewegt sich wieder nach rechts, wo sie am Ende vollständig absorbiert wird. Bildet man nun jeweils die Summe von direkter und reflektierter Welle, so ergibt sich an manchen Punkten immer der Wert null. An allen anderen Stellen entstehen Schwingungen unterschiedlicher Amplitude (siehe Abbildung 2.6).

Wie kann man das Ganze mathematisch ausdrücken? Gemäß Abbildung 2.5 bewegt sich die direkte Welle von rechts nach links und es folgt:

$$y_1 = \hat{y} \sin(\omega t + kx)$$

Wir gehen von einer perfekten Reflexion aus, so dass die reflektierte Welle die gleiche Amplitude hat, nur dass sie sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitet.

$$y_2 = \hat{y} \sin(-\omega t + kx)$$

Wir bilden die Summe:

$$y = y_1 + y_2$$



Abbildung 2.6: Summe von direkter und reflektierter Welle zu unterschiedlichen Zeiten.

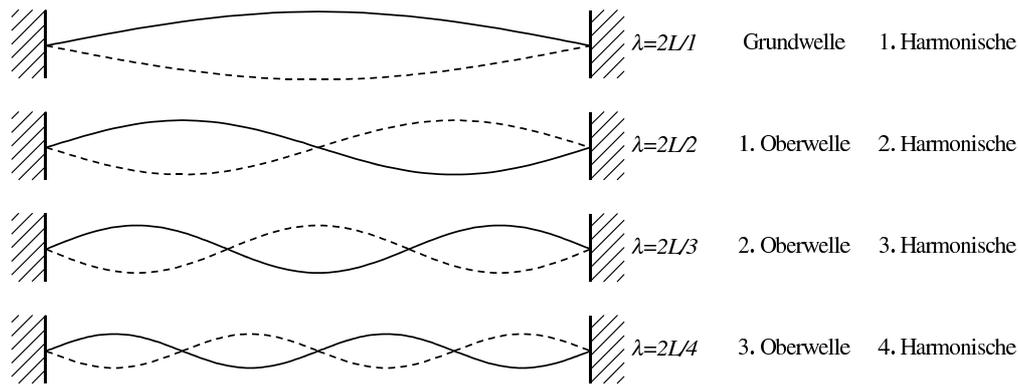


Abbildung 2.7: Grund- und Oberwellen einer schwingenden Saite.

$$\begin{aligned}
 &= \hat{y} \sin(\omega t + kx) + \hat{y} \sin(-\omega t + kx) \\
 &= \hat{y} [\sin(\omega t + kx) + \sin(-\omega t + kx)] \\
 &= \hat{y} [\sin kx \cdot \cos \omega t + \cos kx \cdot \sin \omega t \\
 &\quad + (\sin kx \cdot \cos \omega t - \cos kx \cdot \sin \omega t)] \\
 y &= 2\hat{y} \sin kx \cdot \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Was wir erhalten, ist eine Formel, die an den Stellen $kx = n\pi$ (mit $n = 0, 1, 2, \dots$) immer den Wert null hat, und an allen anderen Stellen mit der Kreisfrequenz ω schwingt.

In der Raumakustik hat dieser Effekt einen wesentlichen Einfluss auf die Variation der Frequenzgänge an unterschiedlichen Stellen im Raum.

In einem elektrischen Kabel entstehen stehende Wellen, wenn die Enden nicht korrekt abgeschlossen sind. Dabei dürfen die Enden weder Kurzgeschlossen (niederohmig) noch offengelassen werden (hochohmig), beides führt zu Reflexionen. Je nach Kabeltyp muss ein Abschlusswiderstand mit passendem Wert gewählt werden.

2.4.2 Resonanzen

Bei der stehenden Welle hatten wir es mit nur einem Reflektor zu tun, und wir mussten nur zwei Wellen addieren, um das Ergebnis zu studieren. *Resonanzen* treten dann auf, wenn wir es mit zwei oder mehr sich gegenüberliegenden Reflektoren zu tun haben. In solchen Systemen gibt es eine Vielzahl von reflektierten Wellen, die zu einer Summe addiert werden. Stehen Abstand der Reflektoren und die anregende Frequenz in einem geeigneten Verhältnis, so kommt ein solches System in *Resonanz*.

Als Beispiel betrachten wir eine Saite, die zwischen zwei festen Körper gespannt ist, siehe Abbildung 2.7. Ein Sonderfall tritt dann auf, wenn sich die reflektierten Wellen so in Phase befinden, dass sich ihre Maxima und Minima jeweils addieren. Bei der Anordnung in Abbildung 2.7 ist das nur bei bestimmten (diskreten) Frequenzen möglich. Es entstehen *Resonanzen*.

Die größte Wellenlänge wird bei einer schwingenden Saite erreicht, wenn neben den Endpunkten keine weiteren Knoten entstehen. In diesem Zustand ist die Wellenlänge, λ , doppelt so groß wie die Saite lang ist. Es ergibt sich eine Resonanzfrequenz von $f = c/\lambda = c/2L$. Dies ist die Grundschwingung der Saite.

Die nächstkleinere Wellenlänge entsteht, wenn es neben den Knoten an den Endpunkten einen weiteren Knoten in der Mitte der Saite gibt. Die Frequenz beträgt dann $f = c/\lambda = c/L$. Das ist die erste Oberwelle der Saite.

Neben der ersten Oberwelle kann es weitere Oberwellen geben. Z. B. hat die dritte Oberwelle neben den Knoten an den Enden der Saite drei weitere Knoten entlang der Saite, siehe Abbildung 2.7 unten.

Stehen Grundschwingung und Oberwelle in einem ganzzahligen Verhältnis, so sind sie harmonisch zueinander. Die Grundschwingung ist die erste Harmonische. Bei der Saite entspricht die erste Oberwelle der zweiten Harmonischen, die zweite Oberwelle der dritten Harmonischen u.s.w.

Das gleiche Verhalten kann bei Wellensystemen mit zwei offenen Enden beobachtet werden. Beispiele dafür sind eine offene (nicht gedackte) Orgelpfeife oder die Resonanzröhre eines Vibraphons.

Allgemein gilt für ein Wellensystem der Länge L mit zwei festen, bzw. zwei offenen Enden:

$$\lambda = \frac{2L}{n+1} \quad \text{und} \quad f = \frac{(n+1)c}{2L} \tag{2.7}$$

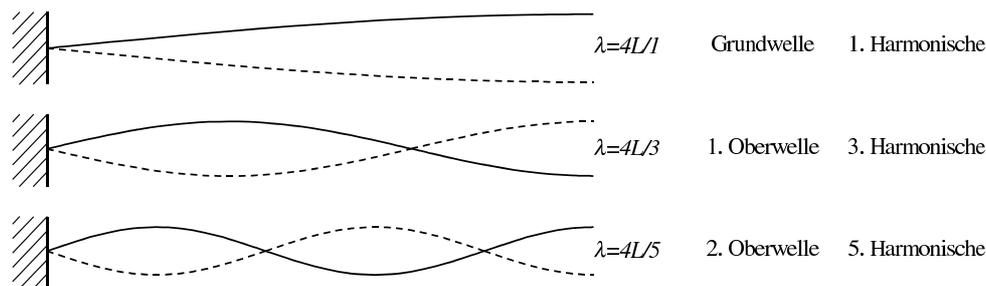


Abbildung 2.8: Wellensystem mit einem festen und einem offenen Ende.

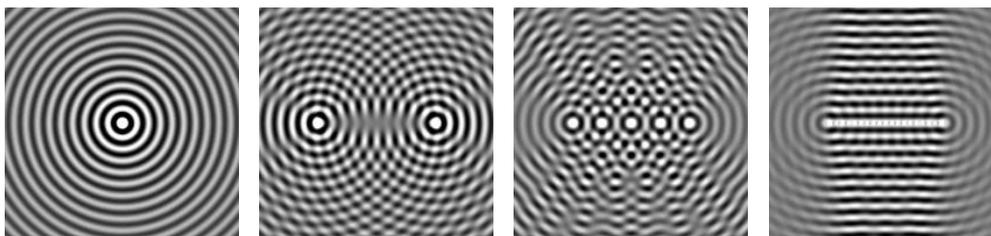


Abbildung 2.9: Eine große Anzahl kugelförmiger Wellen bildet eine ebene Wellenfront.

Hier steht n für den Index der Oberwellen; die Grundschwingung hat den Index 0.

Für Wellensysteme mit einem offenen und einem festen Ende (siehe Abbildung 2.8) gilt ein etwas anderer Zusammenhang. Bei der Grundschwingung ist die Wellenlänge, λ , viermal so groß wie die Länge, L , des schwingenden Systems. Es ergibt sich für die Frequenz der Grundschwingung: $f = c/\lambda = c/4L$

Vergleichen wir ein einseitig offenes mit einem beidseitig offenen oder beidseitig geschlossenem System gleicher Länge, L , so ergibt sich die doppelte Wellenlänge, bzw. die halbe Frequenz. Das einseitig offene System schwingt eine Oktave tiefer.

Bei der ersten Oberwelle ist die Wellenlänge, λ , $4/3$ größer als die Länge, L , des Systems. Die Frequenz beträgt $f = c/\lambda = 3c/4L$. Das heißt, die erste Oberwelle hat die dreifache Frequenz der Grundschwingung. Beide sind harmonisch zueinander, nur dass jetzt die erste Oberwelle der dritten Harmonischen entspricht.

Allgemein gilt für ein einseitig offenes Wellensystem:

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1} \quad \text{und} \quad f = \frac{(2n+1)c}{4L} \quad (2.8)$$

Das n steht wieder für den Index der Oberwellen; die Grundschwingung hat den Index 0.

Beispiele für einseitig offene Systeme sind die Panflöte und die geschlossene (gedackte) Orgelpfeife. (Bei den genannten Beispielen spielen der Durchmesser und die Form des Querschnitts auch eine Rolle. Von daher hat z. B. eine gedackte Orgelpfeife nicht exakt die halbe Frequenz einer gleichlangen nicht gedackten Orgelpfeife.)

Aufgabe 2.5 Das Jagdhorn ist ein beidseitig offenes Wellensystem. Der tiefste Ton, das B, hat die Frequenz 116,5 Hz. Berechnen Sie die Frequenzen der ersten drei Oberwellen.

Aufgabe 2.6 Das eingestrichene a einer Panflöte (einseitig offenes System) hat die Frequenz 440 Hz.

1. Berechnen Sie, ausgehend von einer Schallgeschwindigkeit von 340 m/s, die Länge des Rohrs.
2. Welche Frequenz ergibt sich, wenn dieser Ton einfach überblasen wird (1. Oberwelle)?

2.5 Wellenfronten

2.5.1 Das Prinzip nach Huygens

Man kann sich Wellenfronten als eine Summe vieler Kugelwellen vorstellen. Der Holländische Wissenschaftler Christian Huygens beschäftigte sich bereits 1678 mit diesem nach ihm benannten Prinzip. In Abbildung 2.9 wurde die Summe von kreisförmigen Wellen mit 1, 2, 5 und 20 Zentren berechnet. Im rechten Bild kann deutlich die Wellenfront erkannt werden, die sich vertikal mit horizontalen Linien ausbreitet.

Allgemein ausgedrückt lautet Huygens Prinzip wie folgt:

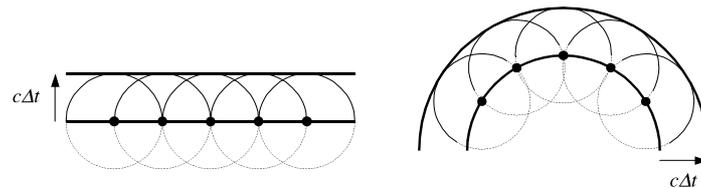


Abbildung 2.10: Die Ausbreitung einer Wellenfront gemäß dem Prinzip von Huygens.

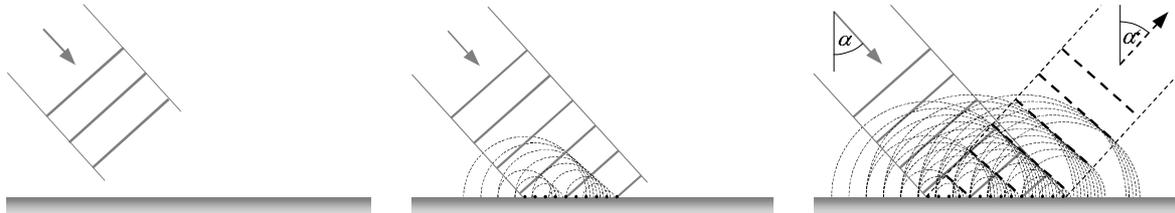


Abbildung 2.11: Spiegelung, dargestellt in drei Schritten nach dem Huygens-Prinzip.

Alle Punkte einer Wellenfront verhalten sich wie punktförmige Quellen von Kugelwellen, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Wellenfront ausbreiten. Nach einer kurzen Zeit, Δt , bilden die vorwärtsgerichteten Tangenten die neue Wellenfront.

Abbildung 2.10 veranschaulicht diesen Zusammenhang anhand einer ebenen und einer kugelförmigen Wellenfront.

Aufgabe 2.7 Wie entwickelt sich eine Welle hinter einem engen Spalt, wie hinter einem kleinen Loch?

2.5.2 Reflexion

Wir stellen uns die Frage, was mit einer Welle passiert, die auf eine reflektierende Ebene fällt. Zur Beantwortung soll das Prinzip nach Huygens angewendet werden. In Abbildung 2.11 werden im linken Bild ein Reflektor und eine eintreffende Welle gezeigt. Im mittleren Bild trifft die Welle auf den Reflektor, und wir zeichnen die ersten Kugelwellen ein. Beim Einzeichnen der Kugelwellen muss zum einen die Phase beachtet werden, zum anderen muss der Abstand zwischen den Kreisen einer Kugelwelle gleich der Wellenlänge der eintreffenden Welle sein. Bereits jetzt kann eine gemeinsame Tangente der Kugelwellen erkannt werden. Schließlich, im rechten Bild, ist das vollständige Bild der Reflexion nach dem Huygens Prinzip dargestellt.

Die wichtigste Erkenntnis aus dieser Herleitung: *Der Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel, $\alpha = \alpha'$.*

2.5.3 Brechung

Brechung tritt dann auf, wenn eine Welle die Grenze zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten überschreitet. Wir betrachten den Übergang zwischen Medien mit Wellengeschwindigkeiten c_1 und c_2 , wobei c_2 kleiner c_1 ist. Trifft eine Welle mit Wellengeschwindigkeit c_1 auf den Übergang zu Medium 2, so können wieder gemäß dem Huygens-Prinzip im neuen Medium Kugelwellen angenommen werden, nur dass der Abstand zwischen den Ringen der Kugelwellen um c_2/c_1 kleiner als die Wellenlänge im Medium 1 sein muss (siehe Abbildung 2.12). Die Tangenten der Kugelwellen ergeben im Medium 2 eine Welle mit geänderter Wellenlänge und Ausbreitungsrichtung. Die neue Wellenlänge ergibt sich direkt aus den Wellengeschwindigkeiten:

$$\lambda_2 = \frac{c_2}{c_1} \lambda_1$$

Im rechten Bild von Abbildung 2.12 sind bereits die Winkel der eintreffenden und gebrochenen Welle relativ zur Normalen der Brechungsebene eingetragen. Daraus lassen sich zwei rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse bilden, siehe Abbildung 2.13.

Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2.9)$$

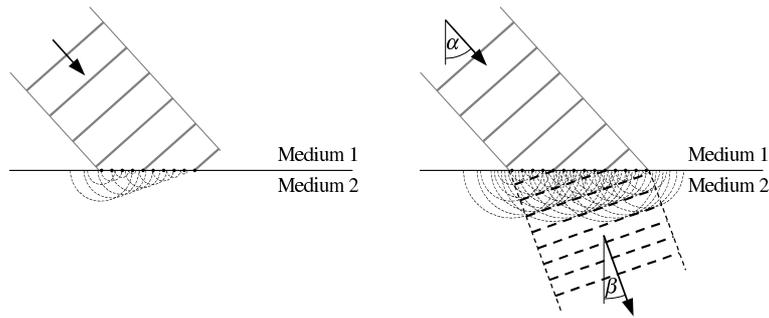


Abbildung 2.12: Brechung, dargestellt in zwei Schritten nach dem Huygens-Prinzip.

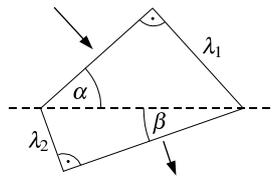


Abbildung 2.13: Zusammenhang zwischen Winkeln und Wellenlängen bei Brechung.

Aufgabe 2.8 Leiten Sie Gleichung (2.9) her.

Aufgabe 2.9 Berechnen Sie den maximalen Winkel β der innerhalb eines Mediums mit Wellengeschwindigkeit $c_2 = c_1/2$ nach der Brechung entstehen kann.

2.5.4 Beugung

Wie kommt es, dass wir eine Schallquelle hören können, auch wenn sie sich z.B. hinter einer Hausecke verbirgt? Die Antwort ist im Bereich Beugung zu suchen. In Abbildung 2.14 ist das grundsätzliche Verhalten dargestellt.

Bewegt man sich aus dem direkten Einflussbereich einer ebenen Welle in den Schatten eines Hindernisses hinein, so nimmt die Amplitude der messbaren Welle ab. Wie weit die Welle hinter das Hindernis hinein gebeugt wird, kann von daher nur ungefähr angegeben werden.

Mit den Variablenbezeichnungen aus Abbildung 2.15 ergibt sich das Maß, um die eine Welle hinter ein Hindernis 'hinein-gebeugt' wird:

$$x \approx \sqrt{\lambda D} \quad (2.10)$$

Aufgabe 2.10 Wie verändert sich der Klang von Musik, wenn man ihr hinter einem Hindernis lauscht?

Aufgabe 2.11 Sie verstecken sich hinter dem Ende einer Mauer und lauschen einem Konzert Ihrer Lieblingsband. Wie weit müssten Sie sich von der Mauer wegbewegen, wenn Sie den vollen Klanggenuss (bis 16 kHz) haben, aber gleichzeitig immer 20 cm im Schatten der Mauer bleiben wollen?

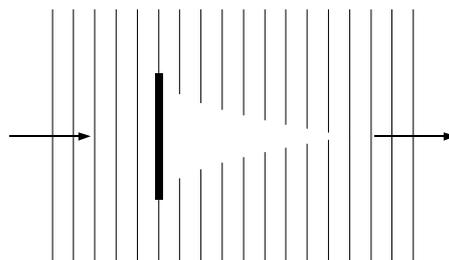


Abbildung 2.14: Wellen werden in den Schatten eines Gegenstandes gebeugt.

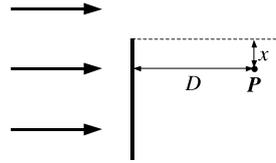


Abbildung 2.15: Variablen für die Berechnung der Brechung.

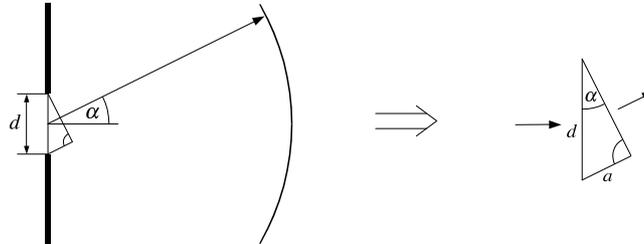


Abbildung 2.16: Beugung an einem einzelnen Spalt.

2.6 Interferenzen an Spalten

Stößt eine Welle auf ein Hindernis mit mehreren spaltförmigen Öffnungen, so entsteht dahinter ein Interferenzmuster. Um dieses Phänomen zu untersuchen, gehen wir zunächst von einem Spalt aus, danach betrachten wir das Verhalten an mehreren Spalten.

2.6.1 Interferenz an einem Spalt

Wir stellen uns die Frage, wie sich die Intensitätsverteilung hinter einem Spalt ergibt, auf den eine ebene Welle trifft.

Für die Berechnung gehen wir davon aus, dass sich der Betrachter unendlich weit entfernt, unter dem Winkel α abweichend von der Normalen befindet (siehe Abbildung 2.16). Weiterhin gehen wir davon aus, dass sich eine ebene Welle senkrecht auf den Spalt zu bewegt.

Nach dem Prinzip von Huygens setzen wir im Spalt eine große Anzahl von Kugelwellen an, die alle in Phase liegen. Der Betrachter schaut unter dem Winkel α auf den Spalt, so dass die Kugelwellen unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen müssen, und sie somit beim Betrachter unterschiedliche Phasen haben. Da für den Betrachter die Summe der Wellen von Bedeutung ist, nicht die exakte Startposition, können wir zur Vereinfachung der Berechnung die Kugelwellen von der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks auf die Gegenkathete verschieben (siehe Abbildung 2.17).

Wir integrieren nun über die Gegenkathete mit der Länge $a = d \sin \alpha$. Um eine einfache Lösung zu erhalten, integrieren wir nicht von 0 bis a , sondern von $-a/2$ bis $a/2$. Der Winkel α taucht erst dann wieder auf, wenn wir für die Variable a wieder $d \sin \alpha$ einsetzen. Wir fassen die Zeitkomponente, ωt , und den Nullphasenwinkel, φ_0 , mit dem Winkel φ zusammen. (Später wird dieser Teil sowieso verschwinden.)

$$s(\alpha) = \frac{\hat{s}}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)} dx = \frac{\hat{s}\lambda}{i2\pi a} \left| e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)} \right|_{-a/2}^{a/2}$$

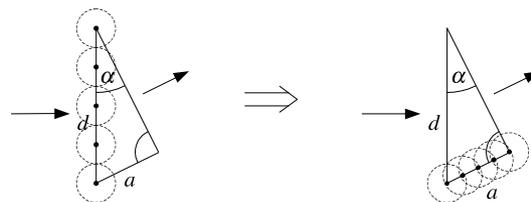


Abbildung 2.17: Verschiebung der Kugelwellen ohne Veränderung der Phasenlage.

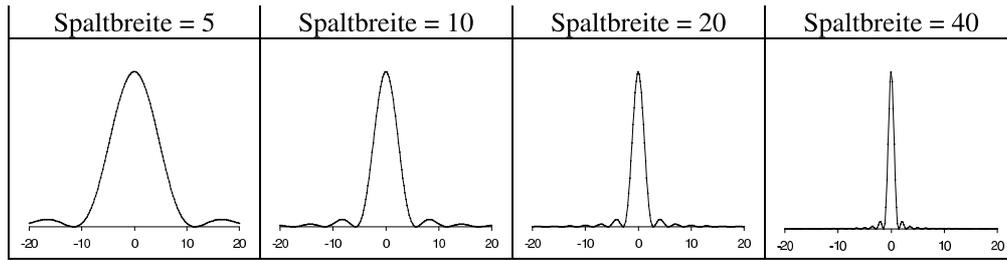


Abbildung 2.18: Beugungsmuster an einem Spalt für verschiedene Spaltbreiten.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hat{s}\lambda}{i2\pi a} \left(e^{i\left(\frac{2\pi a}{2\lambda}x+\varphi\right)} - e^{i\left(-\frac{2\pi a}{2\lambda}x+\varphi\right)} \right) = \frac{\hat{s}\lambda}{i2\pi a} e^{i\varphi} \left(e^{i\frac{\pi a}{\lambda}} - e^{-i\frac{\pi a}{\lambda}} \right) \\
 &= \frac{\hat{s}\lambda}{i2\pi a} e^{i\varphi} 2i \sin \frac{\pi a}{\lambda} = \frac{\hat{s}\lambda}{\pi a} e^{i\varphi} \sin \frac{\pi a}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt setzen wir für a wieder die Formel $d \cdot \sin \alpha$ ein.

$$s(\alpha) = \frac{\hat{s}\lambda}{\pi d \sin \alpha} e^{i\varphi} \sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}$$

Bei der Amplitude handelt es sich um eine lineare Größe. Sinnvoller ist es aber die Intensität, $I(\alpha)$, zu betrachten, welche proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Als Proportionalitätsfaktor führen wir hier übergangsweise die Konstante k ein.

$$I(\alpha) = k \left(\frac{\hat{s}\lambda}{\pi d \sin \alpha} \right)^2 e^{2i\varphi} \sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda} \right)$$

Die höchste Intensität erwarten wir in Vorwärtsrichtung, $\alpha = 0$, da in dieser Richtung alle Kugelwellen mit gleicher Phase schwingen. Es ergibt sich eine Division $0/0$, welche sich aber durch zweifache Ableitung von Zähler und Nenner auflösen lässt. Es folgt:

$$I_0 = I(\alpha = 0) = k\hat{s}^2 e^{2i\varphi}$$

Um sich von den absoluten Werten zu lösen, wird die Intensitätsverteilung relativ zu der Intensität in Vorwärtsrichtung angegeben.

$$\frac{I(\alpha)}{I_0} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)^2} = \text{si}^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) \quad (2.11)$$

In Abbildung 2.18 sind die Beugungsmuster für verschiedene Spaltbreiten, d , über einen Winkelbereich von ± 20 deg dargestellt. Die Spaltbreite, d , ist relativ zur Wellenlänge, λ , angegeben.

Aufgabe 2.12 Eine Welle mit Wellenlänge 3 cm stößt auf einen Spalt der Breite 15 cm. Bei welchem Beugungswinkel fällt die Intensität das erste mal auf null?

2.6.2 Interferenz an mehreren Spalten

Im letzten Abschnitt wurde die Beugung an einem einzelnen Spalt betrachtet. Werden in einer Blende zwei oder mehr Spalte eingebracht, so ergibt sich ein anderes Verhalten. In der folgenden Herleitung steht d für die Breite der Spalte, n für die Anzahl der Spalte und g für den Abstand der Spaltmitten zueinander. Zur Vereinfachung führen wir wieder die Variable $a = d \sin \alpha$ ein und fassen in φ die Zeitkomponente, ωt , und den Nullphasenwinkel, φ_0 , zusammen (siehe Abschnitt 2.6.1). Hinzu kommt die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ und die Variable $b = g \sin \alpha$, welche dem Wegstreckenunterschied der Kugelwellen von Spalt zu Spalt bezogen auf den Betrachtungswinkel α entspricht.

$$s(\alpha) = \frac{\hat{s}}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i(kx+jkb+\varphi)} dx = \frac{\hat{s}}{iak} \sum_j \left| e^{i(kx+jkb+\varphi)} \right|_{-a/2}^{a/2}$$

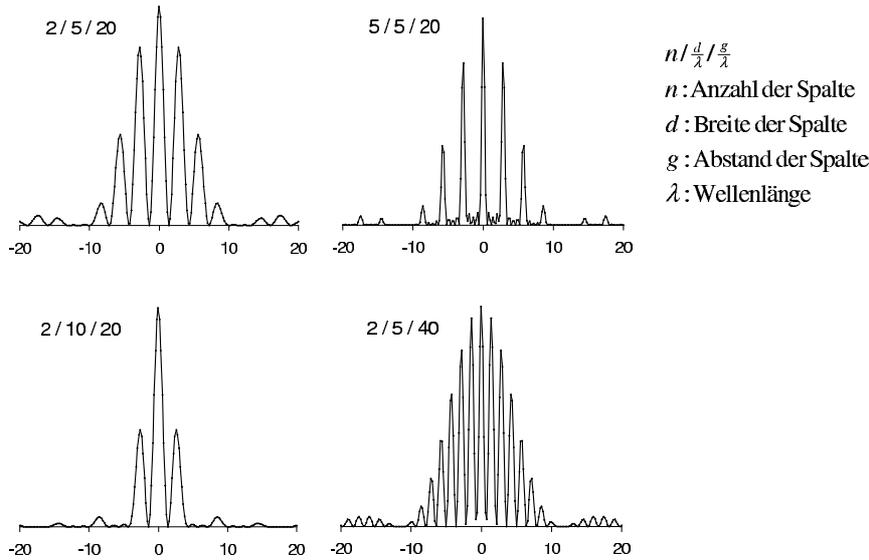


Abbildung 2.19: Interferenzmuster an mehreren Spalten.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hat{s}}{iak} \sum_j \left(e^{i(k\frac{a}{2} + jkb + \varphi)} - e^{i(-k\frac{a}{2} + jkb + \varphi)} \right) \\
 &= \frac{\hat{s}}{iak} e^{i\varphi} \left(e^{ik\frac{a}{2}} - e^{-ik\frac{a}{2}} \right) \sum_j e^{ijkb} = \frac{2\hat{s}}{ak} e^{i\varphi} \sin\left(k\frac{a}{2}\right) \sum_j e^{ijkb}
 \end{aligned}$$

Bei der Summe handelt es sich um eine endliche geometrische Reihe für die allgemein gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 s(\alpha) &= \frac{2\hat{s}}{ak} e^{i\varphi} \sin\left(k\frac{a}{2}\right) \frac{e^{inkb} - 1}{e^{ikb} - 1} \\
 &= \frac{2\hat{s}}{ak} e^{i\varphi} \sin\left(k\frac{a}{2}\right) \frac{e^{in\frac{k}{2}b} - e^{-in\frac{k}{2}b}}{e^{i\frac{k}{2}b} - e^{-i\frac{k}{2}b}} \cdot \frac{e^{in\frac{k}{2}b}}{e^{i\frac{k}{2}b}} \\
 &= 2\hat{s} e^{i\varphi} \frac{e^{in\frac{k}{2}b}}{e^{i\frac{k}{2}b}} \cdot \frac{\sin\left(k\frac{a}{2}\right)}{k\frac{a}{2}} \cdot \frac{2i \sin\left(n\frac{k}{2}b\right)}{2i \sin\left(\frac{k}{2}b\right)}
 \end{aligned}$$

Schließlich bilden wir wieder das Quadrat, um die Intensität, $I(\alpha)$, zu bestimmen, und normieren auf die Intensität in Vorwärtsrichtung. Außerdem ersetzen wir k durch $2\pi/\lambda$, a durch $d \sin \alpha$ und b durch $g \sin \alpha$.

$$\frac{I(\alpha)}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad (2.12)$$

Abbildung 2.19 zeigt ein paar Interferenzmuster. Die drei Zahlen stehen für Spaltzahl, n , Spaltbreite, d , und Spaltabstand, g . Die Angaben für Spaltbreite, d , und Spaltabstand, g , sind relativ zur Wellenlänge, λ , angegeben.

Besteht die eintreffende Welle aus mehreren Wellenlängen, λ_i , so haben die unterschiedlichen Wellenlängen ihre Maxima bei unterschiedlichen Beugungswinkeln, α_i . Abbildung 2.20 wurde mit drei Spalten, $n = 3$, einer Spaltbreite von $d = 5\lambda_{mean}$ und einem Spaltabstand von $g = 10\lambda_{mean}$ berechnet. Die Berechnung wurde bei $\lambda = \lambda_{mean} \pm 20\%$ durchgeführt.

Dieser Effekt kommt bei einem Spaltgitter für sichtbares Licht besonders anschaulich zum Tragen. Trifft weißes Licht auf eine Spaltblende, so können hinter der Blende die Spektralfarben beobachtet werden.

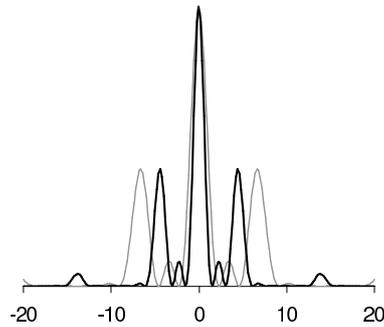
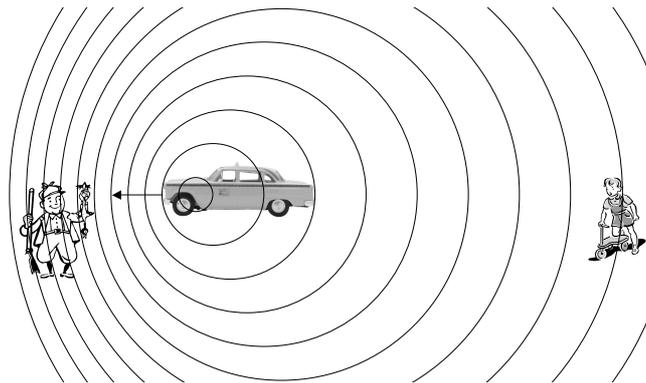
Abbildung 2.20: Interferenzmuster für zwei Wellenlängen mit $\pm 20\%$.

Abbildung 2.21: Aufgrund der Bewegung ergeben sich unterschiedliche Wellenlängen.

Aufgabe 2.13 Eine Welle mit Wellenlänge 2 mm trifft auf zwei Spalte der Breite 2,5 cm die einen Mittenabstand von 4 cm zueinander haben. Berechnen Sie die Beugungswinkel der ersten fünf Intensitätsnullpunkte.

2.7 Dopplereffekt

Die Auswirkung des Dopplereffekts ist jedem Kind bekannt, welches ein schnell vorbeifahrendes Auto durch einen in der Frequenz abfallenden Ton imitiert. Auch wenn der PKW-Fahrer die Drehzahl seines Motors nicht ändert, und für ihn die Frequenz des Motors konstant bleibt, nimmt der Fußgänger am Straßenrand zunächst eine höhere, dann eine tiefere Frequenz wahr.

Bewegt sich ein Wellenerzeuger durch ein wellentragendes Medium, so werden vor ihm die Wellen gestaucht und hinter ihm gedehnt. Bewegt sich der Wellenerzeuger mit der Geschwindigkeit v , so legt er während einer Periode, T , die Strecke vT zurück, und sendet die nächste Welle entsprechend versetzt aus. Auf der Vorderseite wird dadurch die Wellenlänge um diesen Wert verkürzt, auf der Rückseite um diesen Wert verlängert.

$$\lambda' = cT \mp vT = (c \mp v)T$$

Die Frequenz verschiebt sich auf

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c \mp v)T} = \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}} f \quad (2.13)$$

Das obere Vorzeichen gilt für den Bereich vor, das untere für den Bereich hinter dem Wellenerzeuger.

Steht der Wellenerzeuger still, und der Empfänger bewegt sich, so ergibt sich für die Frequenz eine etwas andere Formel:

$$f' = \frac{c \pm v}{\lambda} = \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) f \quad (2.14)$$

Bei $v \ll c$ gehen die beiden Formeln für die Frequenz ineinander über. Beide sind allerdings nur gültig für Bewegungsgeschwindigkeiten weit unter der Lichtgeschwindigkeit.

Bewegt sich der Wellensender oder -empfänger mit einer Geschwindigkeit, die nicht mehr gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann, so muss mit einer relativistischen Formel gerechnet werden:

$$f' = f \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} \quad (2.15)$$

Das obere Vorzeichen gilt bei Annäherung, das untere bei Entfernung.

Der Dopplereffekt wird in Wissenschaft und Technik vielfältig eingesetzt. In der Astronomie kann durch die Rotverschiebung der Lichtspektren die Geschwindigkeit abgeschätzt werden, mit der sich andere Sterne von uns wegbewegen. In der Sonografie (Ultraschall) wird mit dem Dopplereffekt die Geschwindigkeit vom Blut oder den Herzklappen gemessen.

Aufgabe 2.14 Ein PKW sendet eine Frequenz von 150 Hz aus, und fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h. Mit welcher Frequenz nimmt ein Passant das Auto wahr,

1. bei Annäherung und
2. bei Entfernung?

Aufgabe 2.15 Zeigen Sie, dass bei Bewegungsgeschwindigkeiten, die gering gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, die relativistische Formel in die nichtrelativistischen übergeht.

Aufgabe 2.16 Eine Galaxie entferne sich von der Erde mit einer Geschwindigkeit von 15400 km/s. Mit welcher Wellenlänge erscheint die von der Galaxie ausgesandte Spektrallinie des Heliums, die im Labor mit 587,56 nm gemessen wird?

Aufgabe 2.17 Mit welcher Geschwindigkeit muss man sich einer roten (650 nm) Verkehrsampel nähern, damit sie als grün (550 nm) erscheint?

Aufgabe 2.18 Zur Geschwindigkeitskontrolle werden von einem stationären Radargerät Wellen mit einer Frequenz von 3 GHz von vorne auf das fahrende Auto gesandt (bewegter Empfänger). Die Wellen werden vom Fahrzeug wieder zum Radargerät reflektiert (bewegter Sender). Berechnen Sie die Frequenzverschiebung bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h.

Kapitel 3

Akustik

Akustik ist die Wissenschaft vom Schall und ist ein Teilgebiet der Mechanik. Im engeren Sinne beschäftigt sich die Akustik mit Schall in Luft, im für das menschliche Ohr hörbaren Frequenzbereich von 16 bis 16.000 Hz. Im weiteren Sinne beschäftigt sich die Akustik mit Schall in elastischen Medien und schließt den Infra- und Ultraschall mit ein.

In diesem Abschnitt wird der Fokus auf die *Hörakustik* gelegt; andere allgemeinere Bereiche werden nur am Rande angesprochen.

3.1 Kenngrößen von Schall

3.1.1 Allgemeines

In der Akustik werden häufig Messgrößen mit einer Vergleichsgröße ins Verhältnis gebracht. Beispiel: Nehmen wir an, ein durchschnittlicher Fußgänger läuft im strammen Schritt 6 km/h, so können wir dies als Bezug für Geschwindigkeit ansetzen. Die Geschwindigkeitsbegrenzung für PKWs würde dann im Ort einfach 8 betragen, die Autos würden dennoch 10 fahren, die Schallgeschwindigkeit läge bei etwa 200, die Lichtgeschwindigkeit bei $1,8 \cdot 10^8$ u.s.w. Einen praktischen Nährwert bekommt das z. B. bei der Lautstärke, auf die etwas später eingegangen wird.

Werden lineare Größen verglichen (z. B. elektrische Spannung, Strom, Schalldruck), so spricht man von *Faktoren* (z. B. Reflexionsfaktor). Verhältnisse quadratischer Größen (z. B. Leistung, Energie) werden *Grade* genannt. Schließlich, wird das Verhältnis zweier Größen mit gleicher Einheit logarithmisch wiedergegeben, so spricht man von *Maßen* (z. B. Übertragungsmaß) oder *Pegeln* (z. B. Schalldruckpegel).

Wird in der Akustik eine lineare Größe um, sagen wir, den Faktor von 1,5 erhöht, so ändern sich die quadratischen Größen um das Quadrat der linearen Größe, hier also um den Faktor 2,25. Viele der im Folgenden aufgeführten Kenngrößen lassen sich in lineare und quadratische Größen einteilen. Das Wissen darum ist nötig, um bei Bedarf die Pegel korrekt zu bilden.

Pegel werden in Dezibel oder Neper angegeben. *Dezibel* ist definiert als der zwanzigfache Zehnerlogarithmus des Verhältnisses linearer Größen, bzw. der zehnfache Zehnerlogarithmus des Verhältnisses quadratischer Größen. Mit y_1 und y_2 als lineare, sowie Y_1 und Y_2 als quadratische Größen folgt:

$$20 \text{ dB} \cdot \log \frac{y_1}{y_2}, \quad \text{bzw.} \quad 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{Y_1}{Y_2} \quad (3.1)$$

Das *Neper* verwendet den natürlichen Logarithmus mit dem Faktor 1 bei linearen Größen, bzw. 0,5 bei quadratischen Größen. Mit y_1 und y_2 als lineare, sowie Y_1 und Y_2 als quadratische Größen folgt:

$$1 \text{ Np} \cdot \ln \frac{y_1}{y_2}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \text{ Np} \cdot \ln \frac{Y_1}{Y_2} \quad (3.2)$$

Das Verhältnis der beiden Einheiten zueinander ergibt sich zu $1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}$, bzw. $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$. In Abbildung 3.1 sind die Einheiten 0 bis 100 dB, bzw. 0 bis 11,5 Np aufgetragen.

Man unterscheidet relative von absoluten Pegeln. *Relative* Pegel spiegeln das Verhältnis zwischen zwei Größen wieder. Beispiel, wenn Sie an Ihrer Stereoanlage die tiefen Frequenzen um 3 dB anheben, so ist Ihnen der absolute Pegel am Ausgang des Klangreglers immer noch unbekannt. Sie wissen nur, dass die Klangregelstufe die Intensität der tiefen Frequenzen im Vergleich zu den Intensitäten der anderen Frequenzen etwa verdoppelt.

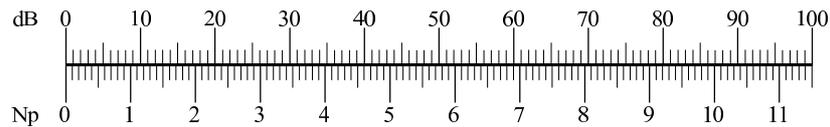


Abbildung 3.1: Vergleich der Einheiten Dezibel und Neper.

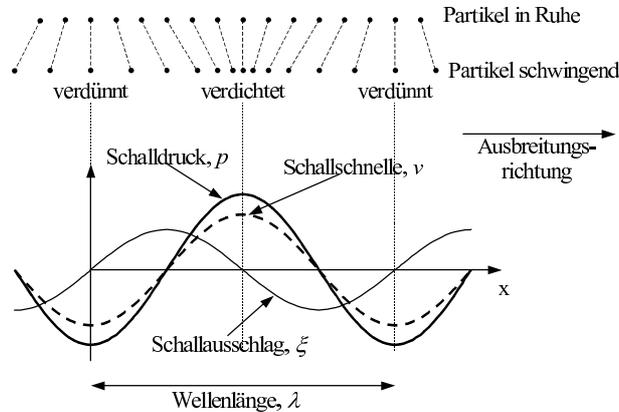


Abbildung 3.2: Ausschlag, Schnelle und Druck von Schall am Beispiel einer Sinuswelle.

Absolute Pegel haben im Nenner einen definierten Wert, y_0 , bzw. Y_0 , stehen. Dies gilt z. B. für absolute Lautstärkenangaben in dB.

Aufgabe 3.1 Ein lineares Signal mit Amplitude 1,8 wird um 6 dB gedämpft. Welche Amplitude ergibt sich?

3.1.2 Physikalische Kenngrößen

Vergleicht man in Abbildung 3.2 die schwingenden Partikel mit den Partikeln in Ruhe, so haben die schwingenden Partikel einen Ausschlag und eine Geschwindigkeit, und der variierende Abstand führt zu einem variierenden Druck. Daraus ergeben sich die Ersten Kenngrößen.

Schallauschlag. Der Schallauschlag, ξ (lineare Größe), gemessen in m, bezeichnet die Amplitude, mit der sich die Partikel aufgrund des Schalls bewegen. (Der kleine Buchstabe ξ , bzw. der große Buchstabe Ξ ist das griechische χ .)

Schallschnelle. Die Schallschnelle, v (lineare Größe), gemessen in m/s, beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Partikel aufgrund des Schalls bewegen.

Schalldruck. Der Schalldruck, p (lineare Größe), gemessen in N/m^2 oder Pa (Pascal), gibt den Druck im Schallfeld wieder. Der Druck ergibt sich aus der Dichte der Partikel. Eine hohe Dichte setzt einen hohen Druck voraus.

Die drei Kenngrößen *Schallauschlag*, *Schallschnelle* und *Schalldruck* setzen sich aus *Ruhewert* und *Wechselwert* zusammen. Die *Ruhewerte* sind die Mittelwerte über Zeit und Raum, welche auch ohne Schall vorhanden sind. Dagegen erzeugt der Schall einen zusätzlichen *Wechselwert*, welcher die Schallwelle charakterisiert. Die *Ruhewerte* haben nur einen indirekten Einfluss auf den Schall, wie beim Dopplereffekt und der Schallgeschwindigkeit.

Schalldruckpegel. Der Schalldruckpegel, L , gemessen in dB, spiegelt den zwanzigfachen Zehnerlogarithmus des Schalldrucks (lineare Größe) relativ zu $20 \mu\text{N/m}^2$ effektiv wieder.

$$L = 20 \text{ dB} \cdot \log \frac{p}{p_0} \quad \text{mit} \quad p_0 = 20 \mu\text{N/m}^2 \text{ effektiv} \quad (3.3)$$

Schallgeschwindigkeit. Die Schallgeschwindigkeit, c , gemessen in m/s, gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle in einem Medium wieder. Sie ist in weiten Bereichen unabhängig gegenüber Frequenz und Amplitude. Bei 20° beträgt die Schallgeschwindigkeit in Luft 343 m/s.

Schallfluss Der Schallfluss, q (lineare Größe), gemessen in m^3/s , bezeichnet die Schallschnelle mal einem Strömungsquerschnitt, S . Unter dem Schallfluss kann man sich ein Volumen vorstellen, dass durch die Fläche S bewegt wird.

$$q = v \cdot S \quad (3.4)$$

Schallkennimpedanz Die Schallkennimpedanz, Z_0 , gemessen in Ns/m^3 , ergibt sich aus dem Quotienten aus Schalldruck und Schallschnelle. Unter normalen Bedingungen ist bei einer ebenen Schallwelle das Verhältnis von Schalldruck und Schallschnelle und damit auch die Schallkennimpedanz immer konstant (siehe Abbildung 3.2). Die Schallkennimpedanz ergibt sich auch aus dem Ruhewert der Dichte, ρ_- , und der Schallgeschwindigkeit, c .

$$Z_0 = \frac{p}{v} = \rho_- \cdot c \quad (3.5)$$

Die Schallkennimpedanz, auch *Schallwellenwiderstand* genannt, ist eine charakteristische Größe des Schallmediums. Luft hat unter normalen atmosphärischen Bedingungen eine Schallkennimpedanz von $408 \text{ Ns}/\text{m}^3$.

Weitere Impedanzen sind die *spezifische Schallimpedanz* und die *akustische Schallimpedanz*, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

Schallintensität Die Schallintensität, J (quadratische Größe), gemessen in W/m^2 , auch *Schallstärke* genannt, spiegelt die Energie pro Zeiteinheit und Flächenelement, bzw. die Leistung pro Flächenelement (Leistungsdichte) wieder. Sie ergibt sich aus dem Produkt der Effektivwerte von Schalldruck und Schallschnelle, bzw. lässt sich mit einem davon zusammen mit der Schallkennimpedanz bestimmen.

$$J = \tilde{p} \cdot \tilde{v} = \frac{\tilde{p}^2}{Z_0} = \tilde{v}^2 \cdot Z_0 \quad (3.6)$$

Schallintensitätspegel Der Schallintensitätspegel, L_J , gemessen in dB, gibt den zehnfachen Zehnerlogarithmus der Schallintensität (quadratische Größe) relativ zu $1 \text{ pW}/\text{m}^2$ wieder.

$$L_J = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{J}{J_0} \quad \text{mit} \quad J_0 = 1 \text{ pW}/\text{m}^2 \quad (3.7)$$

Schalleistung Die Schalleistung, P_a (quadratische Größe), gemessen in W, ist die Schallenergie, die pro Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Schallrichtung stehenden Fläche S strömt. Ist die Schallintensität an allen Punkten von S konstant, so ergibt sich:

$$P_a = J \cdot S \quad (3.8)$$

Integriert man die Schallintensität über eine geschlossene Kugeloberfläche, in dessen Mitte sich eine Schallquelle befindet, so ergibt sich die gesamte Leistung, die von der Schallquelle ausgesandt wird.

Schalleistungspegel Der Schalleistungspegel, L_P , gemessen in dB, spiegelt den zehnfachen Zehnerlogarithmus der Schalleistung (quadratische Größe) relativ zu 1 pW wieder.

$$L_P = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{P_a}{P_{a0}} \quad \text{mit} \quad P_{a0} = 1 \text{ pW} \quad (3.9)$$

Schalldichte Die Schalldichte, E (quadratische Größe), gemessen in Ws/m^3 , J/m^3 oder N/m^2 , ergibt sich aus dem Quotienten von Schallintensität und Schallgeschwindigkeit. Die Schalldichte spiegelt die orts aufgelöste Energie des Schalls, also die Energie pro Volumen wieder, und ist ein Maß für die Schallenergie, die unser Ohr wahrnimmt.

$$E = \frac{J}{c} \quad (3.10)$$

Schallquelle	Pegel
Space shuttle auf 100 m Abstand	165 dB
Platzen des Trommelfells	160 dB
Düsentriebwerk in 50 m Entfernung	130 dB
Rockband mit 4 m Abstand	120 dB
U-Bahn	100 dB
Stadtverkehr	80 dB
normales Gespräch in 1 m Entfernung	60 dB
Mücke	40 dB
Flüstern in 1 m Abstand	20 dB
normales Atmen	10 dB
Hörschwelle	0 dB

Tabelle 3.1: Einige Beispiele für Schallpegel

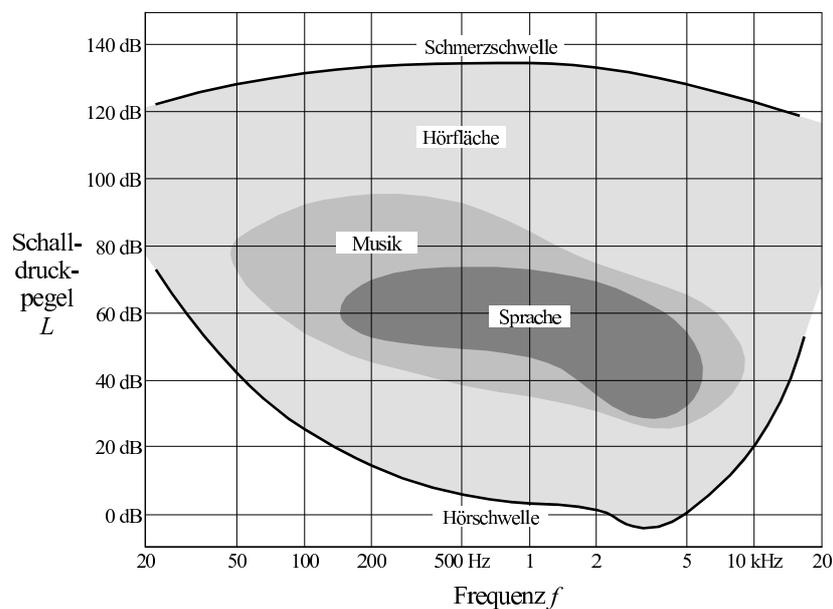


Abbildung 3.3: Hörfläche des menschlichen Ohrs zwischen Hör- und Schmerzgrenze.

Für Schalldruckpegel, Schallintensitätspegel und Schalleistungspegel wurden die Bezugswerte jeweils so gewählt, dass sich unter normalen Bedingungen für ein Signal in etwa die gleichen Zahlenwerte ergeben. Von daher wird häufig einfach nur der Begriff Schallpegel verwendet. In Tabelle 3.1 sind einige Beispiele für Schallpegel zusammengetragen.

Aufgabe 3.2 Ein Signal mit 1 W Leistung wird durch einen Verstärker auf 4 W verstärkt. Wie groß ist die Verstärkung ausgedrückt in dB?

Aufgabe 3.3 Die Schallintensität einer Stimme in 1 m Abstand kann zwischen 10^{-9} und 10^{-3} W/m² schwanken. Welchen Schallpegeln entspricht das?

Aufgabe 3.4 Um wieviel dB erhöht sich der Schalldruckpegel, wenn der Schalldruck verdoppelt wird? Um wieviel, wenn die Schalleistung verdoppelt wird?

Aufgabe 3.5 Eine ebene Welle habe in Luft einen Schalldruckpegel von 60 dB. Bestimmen Sie die effektive Schallschnelle.

3.1.3 Physiologische Kenngrößen

Unser Gehör kann Schallsignale nur innerhalb eines bestimmten Frequenz- und Schallpegelbereichs wahrnehmen. Die untere Schallpegelgrenze bezeichnet man als *Hörschwelle*, die obere als *Schmerzempfindungsschwelle* oder einfach nur *Schmerzhwelle*. Das Gebiet zwischen den beiden Schwellen bezeichnet man als *Hörfläche*.

Die individuelle Hörschwelle einer Person kann durch einfache ja/nein Aussagen für Frequenz und Pegel ermittelt werden. In Abbildung 3.3 ist der Mittelwert der Hörschwelle vieler Testpersonen mit

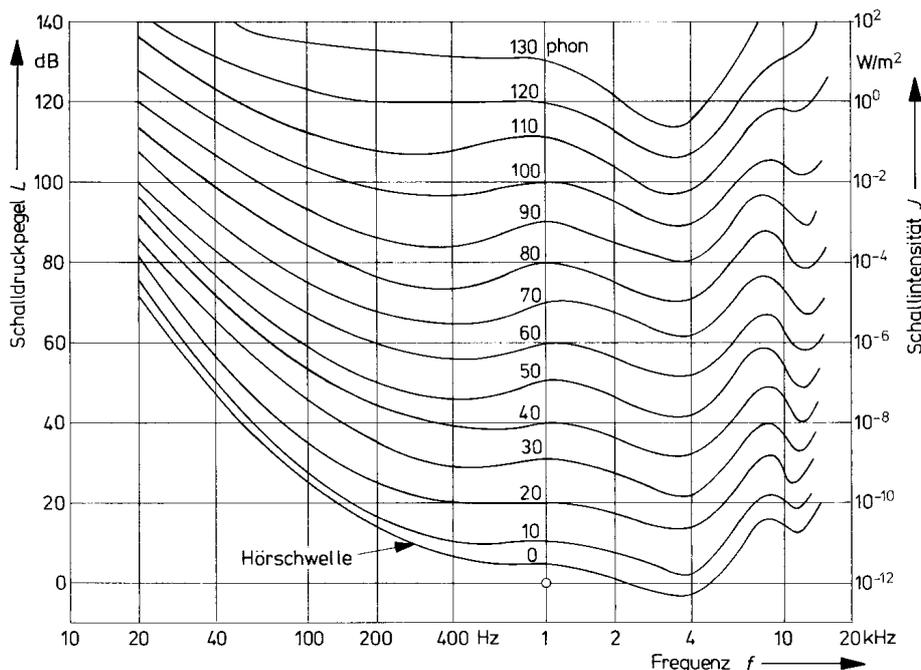


Abbildung 3.4: Kurven gleicher Lautstärke.

gesundem Gehör aufgetragen. Bei einem Hörtest wird die individuelle Hörschwelle mit einer solchen bekannten Hörschwellenkurve verglichen. Als *Hörverlust* bezeichnet man die Differenz zwischen individueller und Referenzkurve.

Die Schmerzschwelle wird sehr unterschiedlich empfunden und kann nur genähert werden.

Unser Gehör ist im Bereich 1-4 kHz am empfindlichsten. Es ist nicht verwunderlich, dass der Frequenzbereich unserer Sprache diesen Bereich (und etwas mehr) abdeckt. In Abbildung 3.3 ist die spektrale Verteilung von Sprache in einem Meter Abstand aufgetragen. Typische Musikdarbietungen decken einen deutlich größeren Bereich ab.

Die Hörschwelle bei 1 kHz liegt bei einem Schalldruck von etwa $20 \mu\text{N}/\text{m}^2$, einer Schallintensität von etwa $1 \text{ pW}/\text{m}^2$, bzw. einer Schalleistung von etwa 1 pW ($1 \text{ pW} = 10^{-12} \text{ W}$). Diese Werte dienen als Bezugswerte für den absoluten Schalldruckpegel, den Schallintensitätspegel und den absoluten Schalleistungspegel, die aber über die Frequenz nicht variiert werden, siehe (3.3), (3.7) und (3.9).

Bereits der Verlauf der Hörschwelle in Abhängigkeit der Frequenz zeigt, dass unser Gehör unterschiedliche Frequenzen auch unterschiedlich laut wahrnimmt. Dieses Verhalten setzt sich bei höheren Pegeln fort. Ein einfacher Versuch ist, verschiedene Frequenzen in der Lautstärke so zu variieren, dass sie subjektiv gleiche Lautstärke bekommen.

Für die Grafen in Abbildung 3.4 wurde eine große Anzahl von Testpersonen mit gesundem Gehör gebeten, die Lautstärke vieler Frequenzen so einzustellen, dass sie die gleiche Lautstärke wie die eines vorgegebenen 1 kHz Tones haben.

Die Grafen in Abbildung 3.4 haben gemein, dass sie sowohl bei hohen, als auch bei niedrigen Frequenzen nach oben gehen. Das Maß, um den die Grafen ansteigen, ist bei niedrigen Pegeln höher, als bei hohen Pegeln. Mit anderen Worten, bei niedrigen Schalldruckpegeln ist unser Gehör für tiefe und hohe Frequenzen deutlicher unempfindlich als bei hohen Schalldruckpegeln. Die Folge, wird Musik bei gleicher objektiver Klangeinstellung lauter abgespielt, so erscheinen die Höhen und Bässe kräftiger als zuvor. Der *Loudness-Filter* an Ihrer Stereoanlage versucht diesen Effekt für niedrige Lautstärken zu kompensieren.

Lautstärke, Lautstärkepegel. Die Größe Lautstärke, bzw. Lautstärkepegel, L_N , mit der Einheit phon, berücksichtigt diesen Zusammenhang. Der Zahlenwert ist bei 1 kHz gleich dem des Schalldruckpegels, gemessen in dB. Bei den anderen Frequenzen gibt die Lautstärke in phon an, welchen Schalldruckpegel ein 1 kHz Ton bei gleicher Lautstärke hätte.

Lautheit Eine weitere physiologische Einheit ist die Lautheit, N , gemessen in sone. Es gilt:

$$N = 1 \text{ sone} \cdot 2^{0,1 \left(\frac{L_N}{\text{phon}} - 40 \right)}$$

Bezeichnung	Formelbuchstabe	Einheit
Schallausschlag	ξ	m
Schallschnelle	v	m/s
Schalldruck	p	N/m ²
Schalldruckpegel	L	dB
Schallgeschwindigkeit	c	m/s
Schallfluss	Q	m ³ /s
Schallkennimpedanz	Z_0	Ns/m ³
Schallintensität	J	W/m ²
Schallintensitätspegel	L_J	dB
Schalleistung	P_a	W
Schalleistungspegel	L_P	dB
Schalldichte	E	Ws/m ³ =N/m ²
Lautstärkepegel	L_N	phon
Lautheit	N	sones

Tabelle 3.2: Liste der wichtigsten Kenngrößen für Schall.

$$\approx 1 \text{ sone} \cdot 10^{0,03 \left(\frac{L_N}{\text{phon}} - 40 \right)} \quad (3.11)$$

$$L_N = 10 \text{ phon} \cdot \log_2 \frac{N}{\text{sones}} + 40 \text{ phon}$$

$$\approx 33 \text{ phon} \cdot \log_{10} \frac{N}{\text{sones}} + 40 \text{ phon} \quad (3.12)$$

Die Lautheit versucht die empfundene Lautstärke besser wiederzuspiegeln. Wenn sich irgendwo der Lautstärkepegel von 100 auf 110 phon erhöht, so ist das nicht ein Zuwachs von 10 %, sondern man empfindet in etwa eine Verdoppelung. Gemessen in sones würde sich der Wert von 64 auf 128 erhöhen.

Aufgabe 3.6 In der Gleichung zur Umrechnung von phon in sones taucht bei der Näherung im Exponenten der Faktor 0,03 auf. Wie müsste der Faktor lauten, damit aus der Näherung eine exakte Formel wird?

Aufgabe 3.7 Bestimmen Sie Lautstärkepegel und Lautheit einer 3,6 kHz Sinusschallwelle bei 80 dB.

Aufgabe 3.8 Bis zu welchem Schalldruck wird eine reine 50 Hz Sinusschwingung nicht wahrgenommen?

3.2 Schallerzeugung

In diesem Abschnitt sollen einige Schallerzeuger erwähnt werden. Der Fokus liegt auf mechanischen Schallerzeugern.

3.2.1 Mechanische Schallerzeuger

Saite. Eine gespannte Saite kann durch Streichen mit einem Bogen (Geige, Cello, Kontrabass), durch Zupfen (Gitarre, Zither, Harfe) oder Anschlagen (Klavier, Hammerbrett) zum Schwingen gebracht werden. Die Saite selbst hat nur eine geringe Schallabstrahlung (z. B. E-Gitarre ohne Verstärker). Deshalb wird üblicherweise ein Ende der Saite über einen Resonanzkörper geführt. Die Saite bringt den Resonanzkörper zum Schwingen, der seinerseits über eine größere Fläche die Schwingung als Schall an die Umgebung weitergibt.

Stab. Ein schwingender Stab (beidseitig offen) kann zu Dehn-, Biege- oder Torsionsschwingungen angeregt werden. Das Glockenspiel besteht aus Klangstäben, die zu Biegeschwingungen angeregt werden.

Zunge. Eine schwingende Zunge (einseitig eingespannter Stab) kann ebenfalls zu Dehn-, Biege- oder Torsionsschwingungen angeregt werden. In der Mundharmonika werden kleine Stäbe zu Biegeschwingungen angeregt. Ebenso die Stimmgabel, bei der beide Enden aus Symmetriegründen im Gegentakt schwingen. Letztere ist aufgrund ihrer extremen Stabilität gegen Temperatur (nur etwa 0.01 %/°C) zum Stimmen von Instrumenten geeignet.

Membran. Membranen sind eine weitere Schallquelle, die je nach Bauart entweder eher ein Geräusch (Snaredrum) oder einen Ton (Konzertpauke) erzeugen. Letztere hat interessante Oberwellen, die sich sowohl kreisförmig, als auch sternförmig entwickeln können. Das Banjo nutzt eine Membran als Resonanzboden für die Saiten.

Platte. Schwingende Platten sind das zweidimensionale Gegenstück zu Klangstäben. Sie zeigen ein ähnliches Klangverhalten wie Membranen, aber die Oberwellen sind nicht harmonisch zueinander und recht kompliziert zu berechnen.

Glocke. Die Glocke stellt eine spezielle Form von gewölbten Platten dar. Durch geeignete Form wird dafür gesorgt, dass die Glocke mit ihren Oberwellen einen harmonischen Klang erzeugt (z. B. einen abgestimmten Moll-Dreiklang). Eine schlecht abgestimmte Glocke klingt auch alleine, in sich schief.

Luftsäule. Schwingende Luftsäulen treten in verschiedenen Formen auf. Es wird zwischen einseitig offenen (Panflöte, gedackte Orgelpfeife) und beidseitig offenen, bzw. beidseitig geschlossenen Systemen (Blockflöte, Trompete, ungedackte Orgelpfeife) unterschieden.

Sirenen. Sirenen können akustische Leistungen bis in den kW-Bereich zu erzeugen. Der Ton wird durch einen periodisch unterbrochenen Luftstrom erzeugt. Eine Düse bläst einen kräftigen Luftstrom auf eine rotierende Blende mit Löchern, so dass der sich zyklisch ändernde Luftstrom ein periodisches Signal erzeugt. Durch den Abstand der Löcher und die Rotationsgeschwindigkeit der Blende kann die Frequenz eingestellt werden.

Hieb- und Schneidetöne. Strömt Luft schnell an einer scharfen Kante vorbei, so entstehen sogenannte Schneidetöne. Bewegt sich das Objekt schnell durch die Luft, so spricht man von Hiebtönen. Die Schallintensität wächst in beiden Fällen etwa mit der 7. Potenz der Geschwindigkeit an! Aus diesem Grund werden Klimaanlage mit großen Querschnitten und geringen Luftgeschwindigkeiten ausgelegt.

Menschliches Sprachorgan. Als letztes betrachten wir das menschliche Sprachorgan. Zunächst erzeugen die durch unsern Atemstrom angeregten gespannten Stimmbänder unperiodische (Sprache) oder periodische (Gesang) Schallwellen. Bevor der Schall den Mund verlässt, gelangt er an verschiedenen Hohlräumen vorbei, die den Klang der Stimme individuell formen. Die dynamische Änderung dieser Hohlräume macht erst unsere Sprache mit unterschiedlichen Vokalen möglich. Weitere Geräusche werden durch Gaumen, Zunge, Zähne und Lippen erzeugt.

3.2.2 Elektrische Schallsender

Ein elektrischer Schallsender wandelt elektrische Energie in Schallenergie um. In den meisten Fällen geschieht die Umwandlung mittels eines elektrisch angeregten mechanischen Schwingkreises mit einer Membran, welche die mechanischen Schwingungen an die umgebende Luft überträgt. Beispiele hierfür sind elektrodynamische und Piezolautsprecher.

Der Wirkungsgrad von Musikklaupsprechern liegt in den meisten Fällen weit unter 10 %. Für die Klangeigenschaft entscheidend ist der Wirkungsgrad als Funktion der Frequenz, der *Amplitudengang*. Die Optimierung des Amplitudenganges bei maximalem Wirkungsgrad ist Gegenstand vieler Entwicklungs- und Forschungsaktivitäten und bietet nach wie vor ein interessantes Betätigungsfeld.

3.2.3 Thermische Schallsender

Bei einem *Thermophon* wird ein dünner Draht, oder eine dünne Metallfolie mit einer Wechselspannung geheizt, so dass sich (bei niedrigen Frequenzen) mit dem Verlauf der angelegten Spannung auch die Temperatur ändert. Die umgebende Luft folgt der Temperatur und dehnt sich zyklisch aus, was als Schall hörbar ist. Da sich, bei einer um null schwankenden Wechselspannung, die Temperatur mit doppelter Frequenz ändern würde, wird der Wechselspannung eine Gleichspannung überlagert. Thermophone eignen sich aufgrund der Wärmeträgheit nur für verhältnismäßig niedrige Frequenzen. Andererseits zeigen Thermophone keine Resonanzeffekte, und eignen sich daher als *Normalschallquelle*.

Der *Ionophon-Lautsprecher* erwärmt mittels Hochfrequenz-Glimmentladung direkt die Luft und umgeht damit große Teile der Wärmeträgheit des Thermophons. Ein Ionophon-Lautsprecher kann Frequenzen von etwa 1 kHz bis 20 kHz verzerrungsfrei übertragen.

3.3 Töne, Klänge und Geräusche

3.3.1 Ton

Liegt eine periodische akustische Schwingung vor, so spricht man von einem Ton. Im engeren, physikalischen Sinn setzt sich ein Ton zusammen aus:

- Frequenz (Tonhöhe)
- Amplitude (Lautstärke)
- Phase (die Phase nimmt unser Ohr nur im Zusammenhang mit anderen Tönen wahr.)

Im weiteren Sinne kommen noch weitere Kenngrößen dazu:

- Kurvenform (Klangfarbe)
- An- und Abklingen (Anschlag, Nachklang, etc.)

Eine Kurvenform, die nicht rein sinusförmig ist, setzt sich aus einer Summe von Sinusschwingungen zusammen, siehe Abschnitt 1.6. Neben dem Grundton kommen eine Reihe Obertöne dazu. Man spricht von einem Ton, der *obertonreich* ist. Eine Stimmgabel oder eine klare Frauenstimme hat eine Kurvenform, die der Sinusschwingung sehr nahe kommt. Eine Bassstimme oder ein Saxophon ist dagegen sehr obertonreich.

Das An- und Abklingen eines Tons ist bereits ein aperiodisches Verhalten, was strenggenommen dem Geräusch zugeordnet werden muss. Die Grenze ist fließend. Dominiert der periodische Anteil, so empfindet man das Gehörte, wie z. B. beim Klavier, als einen Ton. Dominiert der aperiodische Anteil, so nimmt man, wie z. B. bei einer Trommel, ein Geräusch wahr.

Die Variation dieser Kenngrößen bietet eine Vielzahl von Kombinationen, was die Vielfalt von Tönen in der Musik begründet. Die Stimme eines Sängers lässt sich ohne Probleme von Hunderten, wenn nicht Tausenden anderen Stimmen unterscheiden.

3.3.2 Klang

Werden zwei oder mehr Töne gemischt, so spricht man von einem Klang. Unser Gehör kann dabei erstaunlich gut einzelne Töne voneinander trennen. Ein geübter Hörer kann bei Orchestermusik ohne Probleme die einzelnen Instrumente wahrnehmen.

Stehen Töne in einem rationalen Verhältnis, so werden sie als wohlklingend, harmonisch oder sanft empfunden. Das gilt um so mehr, wenn die Verhältniszahlen klein sind. Beispiel: Die Oktave besteht aus zwei Tönen im Verhältnis 1:2, die reine Quinte hat das Verhältnis 2:3, die reine Quarte 3:4 etc.

Klänge mit großen Verhältniszahlen (auch nach Kürzung) oder mit einem irrationalen Verhältnis werden als hart, unangenehm oder auch aggressiv empfunden.

Liegen die Frequenz zweier Töne eng zusammen (z. B. 1 : 1,01), so entstehen Schwebungen mit einer Frequenz, die sich aus der Differenz der beiden Teilfrequenzen ergibt. So können z. B. zwei hohe Töne eine weitaus niedrigere Frequenz erzeugen. Wird die Differenz der Frequenzen sehr klein, so wird die Schwebung als eine Schwankung der Lautstärke wahrgenommen. Dieses Verhalten tritt auch bei Klängen auf, bei denen die Frequenzen der Töne knapp neben einem rationalen Verhältnis liegen (z. B. 2 : 3,01). Dieses Phänomen wird gerne beim Stimmen von Instrumenten verwendet. Entweder wird so gestimmt, dass keine Schwebung übrig bleibt, oder man lässt absichtlich, wie beim Klavierstimmen, eine definierte Schwebung stehen.

Ein interessantes Forschungsgebiet ist die Wirkung von Klängen auf das menschliche Gemüt. Manche Klänge erscheinen fröhlich, andere traurig, wieder andere träumerisch, um nur einige Wirkungen zu nennen. Der Versuch, diese Zusammenhänge ausschließlich mit Assoziationen zu erklären, führt nicht weit genug. Vermutlich lösen bestimmte Frequenzkombinationen entsprechende Gehirnströme aus, die unsere Stimmung beeinflussen.

3.3.3 Einteilung des Frequenzbandes in der Musik

Unser Gehör kann einen Frequenzumfang von etwa zehn Oktaven wahrnehmen. Eine Oktave ist eine Frequenzverdopplung (oder -halbierung) was zu einem Frequenzumfang von $2^{10} \approx 1000$ führt. In unserer Kultur hat es sich eingebürgert, eine Oktave in zwölf gleichgroße Teilschritte zu zerlegen. Man spricht

Intervall	rel. Frequenz	Verhältnis	Abweichung
Prime	1.0000	1:1	0%
kleine Sekunde	1.0595		
große Sekunde	1.1225		
kleine Terz	1.1892	$\approx 6:5$	-16%
große Terz	1.2599	$\approx 5:4$	14%
Quarte	1.3348	$\approx 4:3$	2%
übermäßige Quarte verminderte Quinte	1.4142		
Quinte	1.4983	$\approx 3:2$	-2%
kleine Sexte	1.5874	$\approx 8:5$	-14%
große Sexte	1.6818	$\approx 10:6$	16%
kleine Septime	1.7818		
große Septime	1.8877		
Oktave	2.0000	2:1	0%

Tabelle 3.3: Chromatische Tonleiter und ihre Abweichung zu einigen reinen Intervallen.

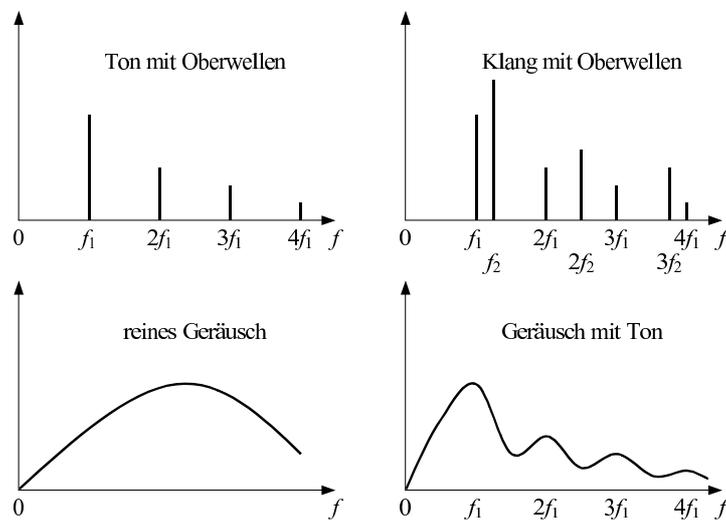


Abbildung 3.5: Typische Frequenzbänder von Ton, Klang und Geräusch.

von einer chromatischen Tonleiter. Dies ist eine Kompromisslösung, die dafür sorgt, dass die Intervalle (Klänge mit zwei Tönen) in allen Tonarten gleich sauber, bzw. gleich unrein klingen. Tabelle 3.3 zeigt die relativen Frequenzen einer chromatischen Tonleiter (eine Oktave). Daneben stehen die Verhältniszahlen von einigen reinen Intervallen und die Abweichungen der chromatischen Tonleiter dazu, relativ zum letzten Tonleiterschritt (Halbton).

Unser Gehör hat sich stark an diese Frequenzeinteilung gewöhnt, so dass die Unreinheiten nicht wahrgenommen werden. Dennoch ist es ein besonderer Genuss, z. B. einem Chor zuzuhören, der das Singen in reinen Intervallen beherrscht. Ein ganzer Akkord erscheint wie ein einzelner intensiver Ton.

3.3.4 Geräusch

Ein Geräusch besteht aus einer aperiodischen Schallwelle. Beispiele: Rauschen des Windes, eine Explosion, Rascheln mit Papier, Platzen einer Papiertüte, ein Wasserfall, Schließen einer Autotür etc. Der Übergang zu Ton und Klang ist fließend. Das Klirren einer Glasscherbe hat bereits eine eigene Frequenz, wird aber noch eher als Geräusch wahrgenommen.

Auch ein Geräusch kann in eine Summe von Frequenzen zerlegt werden, nur dass dafür unendlich viele Frequenzen nötig sind. Während ein Klang aus diskreten Frequenzen besteht, werden bei einem Geräusch die Frequenzen dazwischen aufgefüllt (siehe Abbildung 3.5).

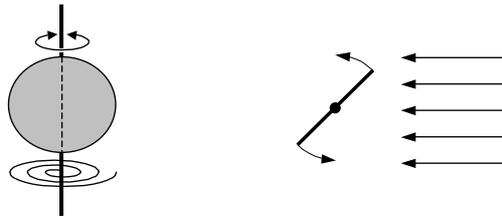


Abbildung 3.6: Prinzip der Rayleigh-Scheibe.

3.4 Schallmessung

Bei der Schallmessung muss zwischen physikalischen und physiologischen Messgrößen unterschieden werden. Bei ersteren muss nach geeigneten Verfahren gesucht werden, die eine physikalische Größe der Akustik (z. B. Schalldruck) in eine ablesbare Größe (z. B. Ausschlag eines Zeigers) überträgt. Zum Messen einer physiologischen Größe (z. B. Lautstärke) muss eine physikalische Größe in Abhängigkeit der Frequenz bewertet werden. Im folgenden wird auf die beiden Kategorien getrennt eingegangen.

3.4.1 Messung physikalischer Größen

Um ein Schallfeld quantitativ zu beschreiben, reicht es entweder die Schallschnelle oder den Schalldruck zu bestimmen. Die anderen Größen lassen sich davon ableiten.

Rayleigh-Scheibe:

Die Rayleigh-Scheibe stellt ein einfaches und altes Verfahren zur Messung der Schallschnelle dar. Das Messinstrument besteht aus einer dünnen Scheibe, die an einem tordierbaren Faden montiert ist (siehe Abbildung 3.6).

Setzt man die Rayleigh-Scheibe einer Strömung senkrecht zur Drehachse aus, so richtet sich die Scheibe quer zur Strömungsrichtung aus. Es entsteht ein Drehmoment, das der Rückstellkraft des Fadens entgegen wirkt. Aus Symmetriegründen ergibt sich, dass bei umgekehrter Strömungsrichtung ein Drehmoment mit gleichem Betrag und gleicher Richtung entsteht.

Eine Schallwelle stellt eine Strömung mit periodisch umkehrender Richtung dar und übt auf die Rayleigh-Scheibe ein Drehmoment aus. Für einen gegebenen Winkel zwischen Scheibe und Strömungsrichtung ergibt sich ein Drehmoment, das proportional zum Quadrat des Effektivwertes der Schallschnelle ist. Bei konstanter Schallimpedanz ist das Drehmoment damit auch proportional zur Schallintensität.

Für die Messung wird zunächst die Scheibe bei ausgeschalteter Schallquelle auf 45° zur Schallrichtung gebracht. Bei eingeschalteter Quelle ergibt sich dann ein Drehmoment mit $M \propto \hat{v}^2$. Der Messfehler ist mit 5% relativ groß.

Messmikrofone:

Während die Rayleigh-Scheibe die Schallschnelle misst, nehmen Mikrofone den Schalldruck auf. Für Messzwecke eingesetzte Mikrofone müssen hohen Anforderungen gerecht werden:

Großer Dynamikbereich. Die Amplitude des elektrischen Signals muss proportional zum Schalldruck sein.

Linearer Frequenzgang. Die Amplitude des elektrischen Signals muss unabhängig von der Frequenz sein.

Kugelförmige Richtcharakteristik. Die Empfindlichkeit muss weitgehend unabhängig von der Schallrichtung sein.

In der Messtechnik werden bevorzugt abgestimmte Kondensatormikrofone eingesetzt. Sie eignen sich für einen sehr großen Dynamikbereich von etwa 30 bis 160 dB und mehr.

Neben der gewünschten Messung hat ein Mikrofon selbst einen Einfluss auf das Schallfeld. Bei einem Durchmesser einer Mikrofonkapsel von 25 mm und senkrechtem Schalleinfall wird oberhalb von 1 kHz vor der Kapsel ein Schalldruckanstieg beobachtet. Zur Kompensation wird der Frequenzgang durch geeignete Dämpfung der Membran angepasst.

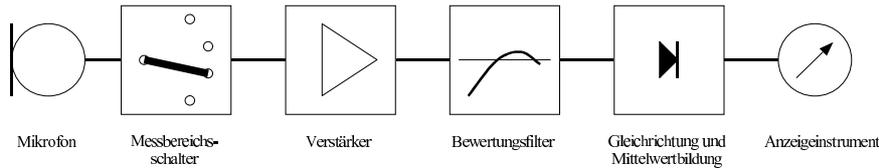


Abbildung 3.7: Prinzipieller Aufbau eines Schallpegelmessers.

Schließlich ist es wichtig, dass sich bei unterschiedlichen Schallrichtungen das gleiche Messergebnis ergibt. Dafür muss das Messmikrofon eine Kugelcharakteristik aufweisen.

3.4.2 Messung physiologischer Größen

Für die Messung physiologischer Größen müssen die physikalischen Größen mit einer Bewertungsfunktion in Abhängigkeit der Frequenz gewichtet werden. Im Prinzip müssten die Kurven gleicher Lautstärke als Umrechnungstabelle dienen (siehe Abschnitt 3.1.3). Etwas einfacher ist der bewertete Schalldruckpegel (weighted sound level) gemäß IEC, gemessen in dB, der die DIN-Lautstärke, gemessen in DIN-phon, zunehmend ablöst. In Abbildung 3.7 ist der prinzipielle Aufbau eines Schallpegelmessers dargestellt.

Das Schallsignal wird im Mikrofon in ein elektrisches Signal umgewandelt. Mit dem Messbereichsschalter wird der gesamte Messbereich in kleinere Bereiche unterteilt. Dadurch kann zum einen eine höhere Genauigkeit erreicht werden, zum anderen kann der Verstärker immer in einem günstigeren Arbeitsbereich betrieben werden, so dass sein Eigenrauschen vernachlässigt werden kann. Der Bewertungsfilter dämpft (oder verstärkt) das Signal in Abhängigkeit der Frequenz in etwa so, wie unser Ohr das Signal wahrnehmen würde. In der nächsten Stufe wird das Signal gleichgerichtet und dann auf ein Anzeigeelement geleitet.

Für den bewerteten Schalldruckpegel gemäß IEC sind drei mögliche Bewertungsfilter festgelegt (A, B und C). Der Pegel ergibt sich mit:

$$L_X = 20 \text{ dB}(X) \log \frac{\tilde{p}_X}{20 \mu\text{N}/\text{m}^2} \quad (3.13)$$

Das X steht für den Filtertyp A, B oder C, während \tilde{p}_X den gemessenen und bewerteten Schalldruck darstellt. Beim Ergebnis wird der Filtertyp in Klammern hinter der Einheit dB angegeben, z. B. dB(A). Die drei Filtertypen spiegeln in etwa die Empfindlichkeitskurven des menschlichen Gehörs bei verschiedenen Lautstärken wieder. Der Filtertyp A ist für Messungen im Bereich der Hörschwelle gedacht, während die Typen B und C entsprechend für mittlere und hohe Lautstärken bestimmt sind.

Abbildung 3.8 zeigt die drei Bewertungsfunktionen A, B und C. Sie stellen im Prinzip den Kehrwert der Kurven gleicher Lautstärke dar.

3.5 Mehrere Schallquellen

Sind bei einer Messung zwei oder mehr voneinander unabhängige Schallquellen vorhanden, so addieren sich die Schallintensitäten der einzelnen Quellen. Für den Schalldruck (und die Schallschnelle) bedeutet dies, dass sich die Quadrate der einzelnen Quellen addieren.

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_i \quad (3.14)$$

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \dots + p_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \quad (3.15)$$

Für die Pegel ergibt sich:

$$L = 10 \text{ dB} \log \frac{J}{J_0} = 10 \text{ dB} \log \sum_{i=1}^n \frac{J_i}{J_0} = 10 \text{ dB} \log \frac{\sum_{i=1}^n J_i}{J_0} \quad (3.16)$$

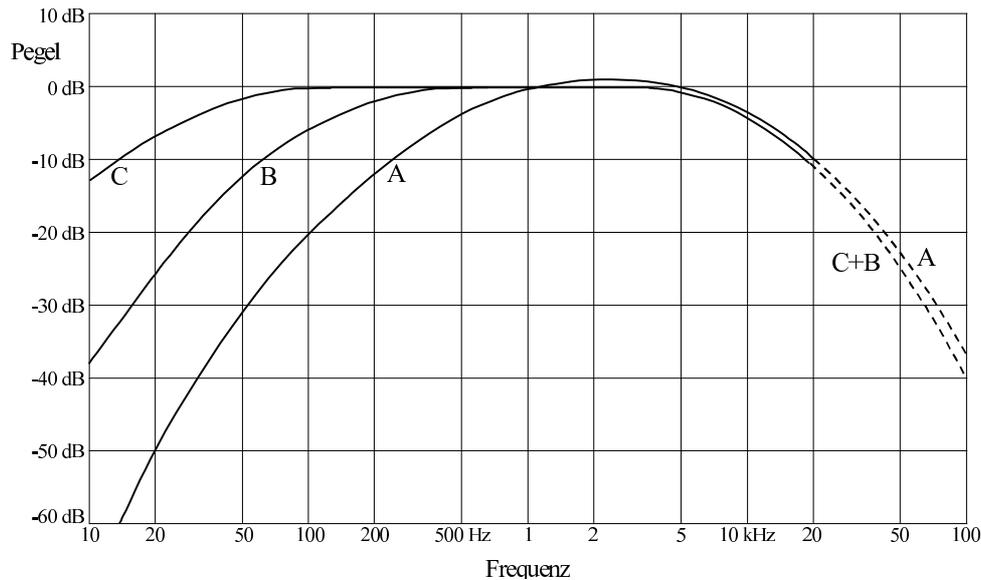


Abbildung 3.8: Bewertungsfilter A, B und C für Schallpegelmesser gemäß IEC.

Phasenversatz	Schalldruck	Schallintensität
0°	$p_1 + p_2$	$(\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2})^2$
90°	$\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$	$J_1 + J_2$
180°	$ p_1 - p_2 $	$(\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2})^2$
270°	$\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$	$J_1 + J_2$

Tabelle 3.4: Schalldruck und -Intensität bei Sinuswellen gleicher Frequenz.

$$L = 20 \text{ dB} \log \frac{p}{p_0} = 20 \text{ dB} \log \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{p_0^2}} = 10 \text{ dB} \log \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{p_0^2} \quad (3.17)$$

Diese Gleichungen gelten, wenn die Schallquellen unabhängig von einander sind, bzw. wenn die Werte über einen größeren örtlichen Bereich gemittelt werden.

Senden zwei örtlich getrennte Schallquellen Sinuswellen gleicher Frequenz aus, so hängt die gemessene Summe von den Strecken zwischen Betrachter und Schallquellen ab. Beträgt der Unterschied zwischen den beiden Strecken ein Vielfaches der Wellenlänge (0° Phase), so müssen die Schalldrücke normal arithmetisch addiert werden. An anderen Stellen, an denen der Streckenunterschied ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt (180° Phase), müssen dagegen die Schalldrücke subtrahiert werden. Siehe hierfür Tabelle 3.4.

Das zunächst Erstaunliche ist, dass zwei für den Betrachter gleichlaute Schallquellen unter bestimmten Bedingungen zusammen die vierfache Schallintensität erzeugen. Dem gegenüber stehen allerdings andere Stellen im Raum, an denen sich die Schallintensitäten gegenseitig aufheben, so dass gemittelt die gewohnte Summe der quadratischen Größen entsteht.

Dieser Zusammenhang spielt z. B. bei Mehrweglautsprechern eine Rolle. Bei der Übergangsfrequenz zwischen zwei Chassis tritt dieser Sonderfall ein, so dass in Abhängigkeit des Ortes eine Über-, bzw. Unterbetonung dieser Frequenz wahrgenommen wird.

Aufgabe 3.9 Sie haben bei einer 100 Hz Sinusschallwelle einen effektiven Schalldruck von 200 mN/m^2 gemessen. Welche Werte haben die bewerteten Schalldruckpegel gemessen in dB(A), dB(B) und dB(C)?

Aufgabe 3.10 Ein elektrisches Gerät mit Netzanschluss soll so konstruiert werden, dass der bewertete Schalldruckpegel für jede einzelne Frequenz unter 40 dB(A) bleibt. Welche absoluten Schallpegel dürfen Sie bei der Netzfrequenz von 50 Hz, bzw. der ersten und zweiten Oberwelle zulassen?

Aufgabe 3.11 Um wie viel erhöht sich der Schallpegel, wenn der Schalldruck einer Quelle verdoppelt wird? Um wie viel erhöht sich der Schallpegel, wenn zu einer Schallquelle eine zweite gleichlaute hinzu kommt?

Aufgabe 3.12 Die Erdgeschossbewohner über einem Waschraum beklagen sich, dass der Lärm seit der Anschaffung einer zweiten baugleichen Waschmaschine nun wirklich nicht mehr zu ertragen sei. Um wie viel dB müsste eine Schalldämmung den Pegel senken, damit die Bewohner genauso viel Lärm wie zuvor haben?

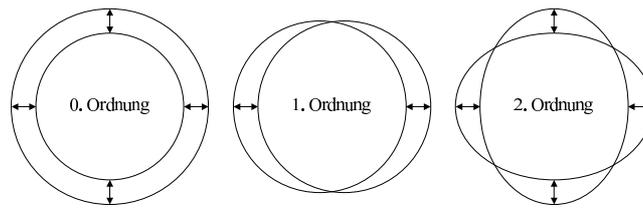


Abbildung 3.9: Schwingung eines Kugelstrahlers 0. bis 2. Ordnung.

Aufgabe 3.13 Ein Drucker erzeuge einen Schallpegel von 45 dB. Durch eine Schallwand konnte der Schallpegel um 13 dB gesenkt werden. Wie viele Drucker können hinter der Wand betrieben werden, bis der ursprüngliche Pegel wieder erreicht wird?

3.6 Schallausbreitung

Wie breiten sich Schallwellen aus? Für Wellen allgemein gilt: Ist die Wellenlänge deutlich größer als Schallquelle, Schallempfänger und Hindernisse, so kann von einer kugelförmigen Ausbreitung ausgegangen werden. Im Gegensatz dazu, ist die Wellenlänge deutlich kleiner als Schallquelle, Schallempfänger und Hindernisse, so muss von einer starken Ausrichtung der Wellen ausgegangen werden.

Hörbarer Schall (16 Hz bis 16 kHz) hat eine Wellenlänge von ca. 2 cm bis 20 m, was der typischen Größe der Gegenstände um uns herum entspricht. Von daher ist die Ausbreitung von Schall meistens eine Kombination von kugelförmiger und gerichteter Ausbreitung. Im Folgenden wird auf die verschiedenen Einflüsse auf die Schallausbreitung eingegangen.

3.6.1 Direkter Schall von Schallquellen

Eine ideale Schallquelle hat die Form einer *atmenden Kugel*. Sie dehnt sich mit dem Schall in alle Richtungen radial gleichmäßig aus und zieht sich wieder zusammen. Alle Punkte auf der Oberfläche haben die gleiche Geschwindigkeit oder Oberflächenschnelle. Sie breitet Ihre Schallwellen in alle Richtungen und über alle Frequenzen gleichmäßig aus. Eine solche Kugel bezeichnet man als *Kugelstrahler nullter Ordnung* oder, wie erwähnt, als *atmende Kugel*. Sie lässt sich leicht berechnen, aber um so schwerer praktisch realisieren. Ein Lautsprecher wirkt bei tiefen Frequenzen wie ein Kugelstrahler nullter Ordnung. Die Schallwellen breiten sich in alle Richtungen gleichmäßig aus.

Schwingen die zwei Hälften einer kugelförmigen Schallquelle im Gegentakt, so spricht man von einem *Kugelstrahler erster Ordnung* oder von einer *oszillierenden Kugel*. Eine solche Schallquelle klingt in verschiedenen Richtungen unterschiedlich laut.

Ein Kugelstrahler höherer Ordnung hat entsprechend mehr Zonen, die im Gegentakt schwingen. Zwischen den schwingenden Zonen bilden sich Knotenlinien, in denen sich die Schwingungen kompensieren. In Abbildung 3.9 sind Kugelstrahler nullter, erster und zweiter Ordnung schematisch dargestellt.

Die Intensität, mit der eine Quelle seine Schallwellen in Abhängigkeit der Richtung aussendet, kann anschaulich in einem *Richtdiagramm* dargestellt werden. In einem solchen Diagramm wird die Intensität als Abstand zum Koordinatenursprung, und die Abstrahlrichtung als Winkel um den Koordinatenursprung aufgetragen.

Eine atmende Kugel (Kugelstrahler nullter Ordnung) breitet seine Schallwellen in alle Richtungen gleichmäßig aus. Als Richtdiagramm ergibt sich ein Kreis, in dessen Mitte der Koordinatenursprung liegt.

Die oszillierende Kugel (Kugelstrahler erster Ordnung) breitet ihre Wellen in zwei Richtungen aus. Dazwischen gibt es zwei Richtungen, unter denen die Intensität auf null geht. Im Richtdiagramm entsteht eine liegende Acht.

In den meisten praktischen Fällen liegt eine Kombination von Kugelstrahlern nullter und höherer Ordnung vor. Ein Lautsprecher kann als eine Kombination einer atmenden und einer oszillierenden Kugel aufgefasst werden. Ist beides zu gleichen Anteilen vertreten, so entsteht ein nierenförmiges Richtdiagramm.

In den meisten Fällen ist ein Richtdiagramm nur für eine Frequenz gültig und muss daher für verschiedene Frequenzen aufgetragen werden.

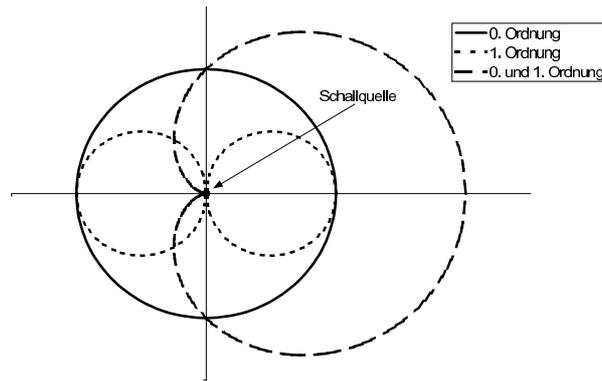


Abbildung 3.10: Richtdiagramm eines Kugelstrahlers 0., 1. und 0. plus 1. Ordnung.

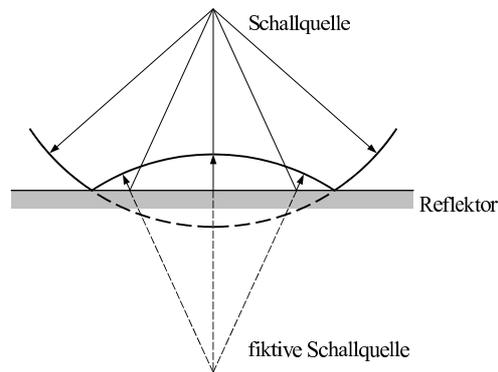


Abbildung 3.11: Reflexion einer Kugelwelle an einer schallharten Wand.

3.6.2 Reflexion

Schallwellen werden an schallharten Wänden genauso reflektiert wie Licht an einem optischen Spiegel. Bezogen auf die Flächennormale gilt das Reflexionsgesetz: Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel.

Der Anteil des reflektierten Schalls wird durch den Reflexionsfaktor, r , bzw. den Reflexionsgrad, ρ , bestimmt (siehe Abschnitt 3.1.1). Der Reflexionsfaktor, r , bezeichnet das Verhältnis zwischen reflektiertem und eintreffendem Schalldruck (lineare Größen). Der Reflexionsgrad, ρ , ist das Verhältnis von reflektierter und eintreffender Schallintensität J .

$$r = \frac{p_r}{p_e}$$

$$\rho = \frac{J_r}{J_e} \quad (3.18)$$

Trifft eine Kugelwelle auf eine Wand, so entsteht eine reflektierte Kugelwelle, deren fiktive Schallquelle hinter der Wand liegt (siehe Abbildung 3.11). Die Folge: Die reflektierte Schallwelle scheint aus der Wand zu kommen.

3.6.3 Beugung

Trifft eine Schallwelle auf ein Hindernis oder eine Öffnung in einer Wand, so treten dahinter Beugungseffekte auf. Das Maß der Beugung ist frequenzabhängig und kann mit dem Prinzip nach Huygens untersucht werden. Allgemein kann festgestellt werden, dass tiefe Frequenzen leichter gebeugt werden als hohe. Dadurch klingt eine Schallquelle hinter einem Hindernis immer dumpfer. Ein Lautsprechersystem mit Subwoofer macht sich diesen Effekt zu eigen. Der große Basslautsprecher wird dezent in eine Ecke verbannt, da sich die tiefen Frequenzen ohne Probleme im Raum ausbreiten. Nur die kleineren Satellitenlautsprecher werden so platziert, dass die Schallwellen ohne Hindernis die Ohren des Hörers erreichen können. Das ist nötig, da jedes Hindernis das Klangbild im Bereich der hohen Frequenzen verändern würde.

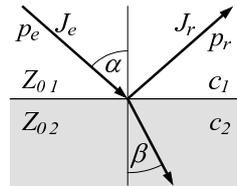


Abbildung 3.12: Reflexion und Brechung am Übergang zu einem dichteren Medium.

3.6.4 Brechung

Trifft Schall auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit anderer Schallgeschwindigkeit, so wird ein Teil des Schalls reflektiert. Der andere Teil dringt in das Medium ein, und ändert dabei seine Richtung. Mit n für den Brechungsindex gilt die allgemeine Gleichung:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (3.19)$$

Das Medium mit der geringeren Schallgeschwindigkeit wird als das akustisch dichtere bezeichnet. Im dichteren Medium ist der Winkel zur Normalen der Grenzfläche immer kleiner. Bewegt sich eine Schallwelle aus einem dichteren Medium in ein weniger dichtes Medium, so tritt ab einem bestimmten Winkel Totalreflexion ein. Der Schall wird zu 100% reflektiert und dringt nicht in das weniger dichte Medium ein.

Bewegt sich eine Schallwelle von einem weniger dichten auf ein dichteres Medium zu, so wird ein Teil der Intensität reflektiert. Mit den Schallkennimpedanzen der beiden Medien, Z_{01} und Z_{02} , kann der Reflexionsgrad, ρ bestimmt werden:

$$\rho = \frac{J_r}{J_e} = r^2 = \frac{p_r^2}{p_e^2} = \left(\frac{Z_{02} \cos \alpha - Z_{01}}{Z_{02} \cos \alpha + Z_{01}} \right)^2 \quad (3.20)$$

Aufgabe 3.14 Bestimmen Sie bei gegebenen Schallgeschwindigkeiten c_1 und c_2 den Winkel α , ab dem Totalreflexion eintritt.

3.6.5 Schalldämmung

Bei der Schalldämmung wird der Schall mittels geeigneter Barrieren abgeblockt. Es geht dabei nicht um das Absorbieren von Schall, also das Umwandeln in Wärme, sondern der Schall soll in einem begrenzten Bereich gehalten werden. Das wird durch die Maximierung von Reflexion an den Grenzflächen erreicht.

Erst wenn Schall an eine Grenzfläche zu einem anderen Medium gelangt, wird ein Teil des Schalls reflektiert. Maximale Reflexion wird erreicht, wenn die Schallkennimpedanzen sehr unterschiedlich sind. So wird Schall in Gasen (Luft) mit festen Wänden gedämmt, während Schall in festen Körpern (z. B. Trittschall) durch leichte Stoffe (z. B. Styropor unter Estrich) gedämmt wird.

Neben dem Reflexionsgrad ρ (siehe Abschnitt 3.6.4) ist der Transmissionsgrad, τ , als das Verhältnis zwischen durchgelassener und eintreffender Schallintensität eine geeignete Größe zur Beschreibung der Dämmeigenschaft:

$$\tau = \frac{J_d}{J_e} = \frac{p_d^2}{p_e^2} \quad (3.21)$$

Bei verlustfreier Dämmung, also ohne Absorption, muss die Summe aus Reflexionsgrad ρ und Transmissionsgrad τ immer eins ergeben.

3.6.6 Schallabsorption

Bei der Schallabsorption wird Schallenergie in Wärme umgewandelt. Man unterscheidet *homogenes* Material von *porösem* Material (mit durchgehenden Poren). Homogenes Material wird durch den Schall deformiert und wandelt dabei Schallenergie durch innere Reibung in Wärme um. Bei porösem Material wird das schwingende Medium (z. B. Luft) durch viele Poren gelenkt. Dabei wird die Schallenergie durch äußere Reibung in Wärme umgewandelt.

Um bei einem Schallabsorber die Reflexion gering zu halten, verwendet man Materialien mit einer Schallkennimpedanz ähnlich der des Schallmediums.

Reflexionsgrad	ρ	$\frac{J_r}{J_e}$	$1 - \alpha$
Transmissionsgrad	τ	$\frac{J_d}{J_e}$	$1 - \rho - \delta$
Absorptionsgrad	α	$\frac{J_e - J_r}{J_e}$	$1 - \rho$
Dämpfungsgrad	δ	$\frac{J_e - J_r - J_d}{J_e}$	$1 - \rho - \tau$

Tabelle 3.5: Zusammenfassung von Kenngrößen zur Schallausbreitung

Ein Maß für die Schallabsorption ist der Absorptionsgrad, α :

$$\alpha = \frac{J_e - J_r}{J_e} = 1 - \frac{J_r}{J_e} = 1 - \rho = 1 - r^2 \quad (3.22)$$

Der Dissipationsgrad, δ , beschreibt die tatsächlich in der Wand verlorengegangene Schallintensität.

$$\delta = \alpha - \tau = 1 - \rho - \tau = \frac{J_e - (J_r + J_d)}{J_e} \quad (3.23)$$

Trifft eine Schallwelle auf ein absorbierendes Material, so muss die Summe aus Reflexion, ρ , Dissipation, δ , und Transmission, τ , immer eins ergeben.

Aufgabe 3.15 Welche Schalldämmung hat ein offenes Fenster? Bestimmen Sie Reflexionsgrad und Transmissionsgrad.

Aufgabe 3.16 Eine freie Schallquelle erzeuge eine Schallintensität von $2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$. Nachdem eine Wand montiert wurde, ergibt sich vor der Wand eine Schallintensität von $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$ und hinter der Wand von $5 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$. Bestimmen Sie Reflexions-, Transmissions-, Absorptions- und Dissipationsgrad, sowie die dazugehörigen Schallpegel.

3.7 Raumakustik

3.7.1 Stehende Wellen

Stehende Wellen entstehen an reflektierenden Flächen. Fällt eine ebene Schallwelle senkrecht auf eine schallharte Reflektorwand mit Reflexionsgrad 1, so addiert sich zu der eintreffenden Welle die reflektierte Welle mit gleicher Frequenz und Amplitude in umgekehrter Richtung:

$$\begin{aligned} p &= p_e + p_r = \hat{p} \cos(\omega t + kx) + \hat{p} \cos(\omega t - kx) \\ &= \hat{p}(\cos \omega t \cos kx - \sin \omega t \sin kx) + \hat{p}(\cos \omega t \cos kx + \sin \omega t \sin kx) \\ p &= 2\hat{p} \cos \omega t \cos kx \end{aligned} \quad (3.24)$$

Das Ergebnis ist eine stehende Welle mit Bäuchen, die mit der Kreisfrequenz ω schwingen, und Knotenpunkten, an denen die Amplitude null ist. In der Praxis wird die reflektierte Welle eine etwas geringere Amplitude haben, so dass die Knotenpunkte mit einer kleinen Amplitude schwingen.

3.7.2 Resonanzen

Stehen sich zwei schallharte Wände gegenüber und es wird dazwischen eine ebene Welle angeregt, so besteht die resultierende Welle aus der eintreffenden Welle plus einer Vielzahl reflektierter Wellen. Bei bestimmten Verhältnissen zwischen Abstand der Wände und Frequenz der Welle addieren sich die Bäuche der Wellen, und das System kommt in *Resonanz*.

Die Amplitude einer solchen stehenden Welle kann dabei um ein vielfaches größer als die Amplitude der ursprünglichen, eintreffenden Welle sein. Das Maß der Resonanzüberhöhung ist durch die Eigenschaften der reflektierenden Wände und die Verluste zwischen den Wänden begrenzt.

Die meisten Räume lassen sich durch ein Quader mit den Kantenlängen l_x , l_y und l_z beschreiben, siehe Abbildung 3.13. Jeweils zwei Flächen des Quaders liegen sich parallel gegenüber und führen für sich bereits zu einer Resonanzüberhöhung. Hinzu kommen Kombinationen zwischen den drei Wandpaaren. Mit n_x , n_y und n_z als die Ordnungszahlen der Eigenschwingungen folgt:

$$f_R = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (3.25)$$

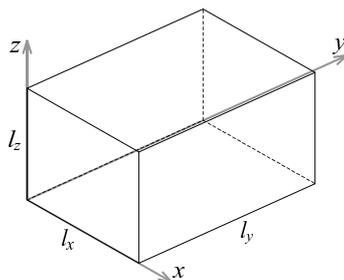


Abbildung 3.13: Ein Raum als Quader mit den Kantenlängen l_x , l_y und l_z .

Je nach Beschaffenheit können diese Resonanzüberhöhungen ohne Hilfsmittel wahrgenommen werden. Wenn in einem gekachelten Raum Töne über einen weiten Frequenzbereich gepfiffen oder gesungen werden, so erscheinen die Töne im Bereich der Resonanzfrequenz deutlich lauter als andere. Es ist möglich, mittels der festgestellten Resonanzfrequenzen, die Größe des Raumes zu ermitteln.

Bei Musikdarbietungen wirken sich die Resonanzfrequenzen störend auf das Klangbild aus. Um diese Effekte zu reduzieren kann zum Beispiel die Beschaffenheit des Raumes verändert werden indem Stoffe oder Teppiche aufgehängt werden. Bei elektrisch verstärkter Musik kann mit einem Equalizer in Grenzen der Frequenzgang so angepasst werden, so dass die Resonanzfrequenzen des Raumes durch entsprechende Dämpfungen kompensiert werden.

3.7.3 Echo

Steht ein Betrachter die Strecke L vor einer schallreflektierenden Wand und sendet eine Schallwelle in Richtung Wand, so braucht die Schallwelle die Zeit L/c , bis sie die Wand erreicht. Nach einer weiteren Zeit von L/c erreicht die reflektierte Schallwelle wieder den Betrachter. Es folgt:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad (3.26)$$

Steht der Betrachter seinerseits vor einer schallreflektierenden Wand, so wird die ausgesandte Schallwelle zwischen den beiden Wänden hin und her reflektiert. Wurde die Schallwelle zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgesandt, so kommt sie nach einem vielfachen von Δt mit abnehmender Amplitude immer wieder beim Betrachter an. Es entsteht das Echo! Die Wiederholungsrate beim Echo hängt vom Abstand der Wände zueinander ab. Die Länge des Echos wird durch den Reflexionsgrad der Wände und den Schalldissipationsgrad zwischen den Wänden bestimmt. Die Klangfarbe des Echos wird durch die Reflexionseigenschaft der Wände beeinflusst.

3.7.4 Hall

Echo entsteht, wenn zwei reflektierende Wände in einem definierten Abstand zueinander stehen. Hall entsteht, wenn sich in einem Raum die Wände mit stark variierenden Abständen gegenüber stehen. Zum Beispiel ergeben sich in dem Gewölbe einer alten Kirche die unterschiedlichsten Abstände zwischen reflektierenden Wänden. Der Effekt ist, eine ausgesendete Schallwelle kommt zu unterschiedlichen Zeiten beim Betrachter an, und wird als Hall wahrgenommen.

Auch in normalen Wohnräumen entsteht ein wenig Hall, den wir aber nicht bewusst wahrnehmen. In speziell hergerichteten Räumen wird der Hall auf ein Minimum reduziert. In einem solchen Raum wird einem erst bewusst, wieviel Hall wir sonst um uns herum haben.

Befindet sich in einem stark hallenden Raum eine Schallquelle (z. B. ein Sprecher), so breitet sich im gesamten Raum ein Hallpegel aus. Nur wenn man sich dichter an die Schallquelle heran bewegt, dominiert irgendwann der direkte Schall (... und man kann die Stimme des Sprechers verstehen). Die direkte Schallintensität nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab. Die Entfernung, bei dem Hallpegel und Pegel des direkten Schalls gleich sind, bezeichnet man als Hallradius, siehe Abbildung 3.14.

Wird in einem Raum eine Schallquelle abgeschaltet, so ist für eine begrenzte Zeit ein Nachhall zu hören. Der Schallpegel des Nachhalls nimmt typischerweise linear ab. Die Zeit, in der der Schallpegel um 60 dB gesunken ist, wird per Definition als Nachhallzeit bezeichnet.

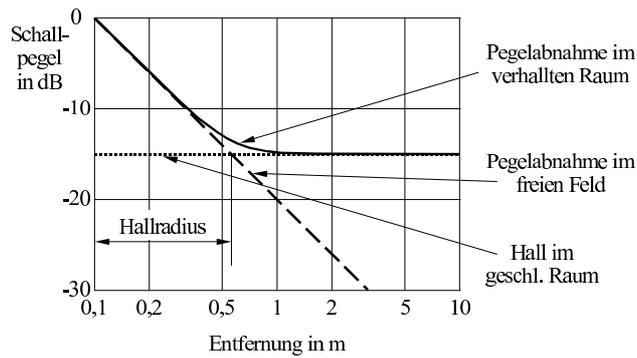


Abbildung 3.14: Beim Hallradius sind Hall und direkter Schall gleich laut.

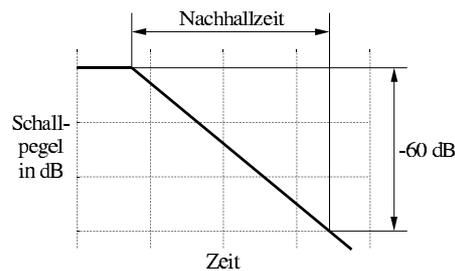


Abbildung 3.15: Definition der Nachhallzeit am Beispiel einer idealen Nachhallkurve.

3.7.5 Absorption

Der akustische Eindruck eines Raumes ist neben seiner geometrischen Form wesentlich vom Reflexionsverhalten der Wände abhängig. Der im Abschnitt 3.6.6 eingeführte Schallabsorptionsgrad, α , ist eine frequenzabhängige Größe. Je nach Beschaffenheit der Wand werden die Frequenzen unterschiedlich stark reflektiert, bzw. absorbiert. Das hat wiederum Einfluss auf die Klangfarbe des Halls, bzw. Nachhalls. Die Abbildungen 3.16, 3.17 und 3.18 zeigen Beispiele von Höhen, Mitten und Tiefenabsorbern und deren Wirkung auf den Frequenzgang der Nachhallzeit.

Unter gegebenen Bedingungen kann durch die dargestellten Maßnahmen, der Klang eines Raumes in Grenzen nach Wunsch verändert werden. Auf die quantitative Berechnung von Dauer und Klangfarbe des Nachhalls wird hier nicht weiter eingegangen.

Als weiteren Anhaltspunkt geben die Abbildungen 3.19 und 3.20 die Schallabsorptionsgrade für verschiedene Oberflächen wieder.

Aufgabe 3.17 Ein Wirtschaftsraum habe die Maße $3 \times 4 \times 2,5$ m. Bestimmen Sie die ersten fünf Resonanzfrequenzen.

Aufgabe 3.18 Sie stehen vor einer Felswand und stellen fest, dass das Echo Ihres Rufs mit drei Sekunden Verzögerung bei Ihnen ankommt. Wie weit ist die Felswand von Ihnen entfernt?

Aufgabe 3.19 Sie messen 50 cm vor einer Schallquelle einen Schallintensitätspegel von 70 dB, während der Pegel des Halls im Raum 50 dB beträgt. Bestimmen Sie den Hallradius.

Aufgabe 3.20 Welchen Schallpegel hat ein 80 dB Signal 1,2 s nach Abschalten in einem Raum mit 3 s Nachhallzeit?

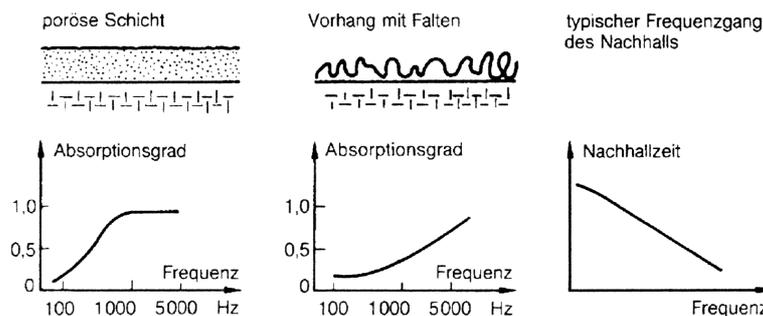


Abbildung 3.16: Beispiele für Höhenabsorber und ihre Wirkung auf die Nachhallzeit.

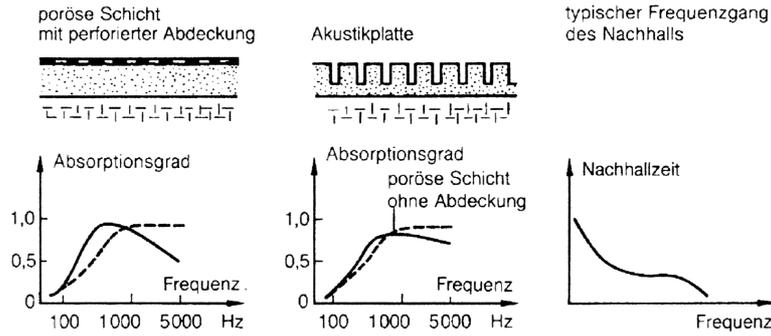


Abbildung 3.17: Beispiele für Mittenabsorber und ihre Wirkung auf die Nachhallzeit.

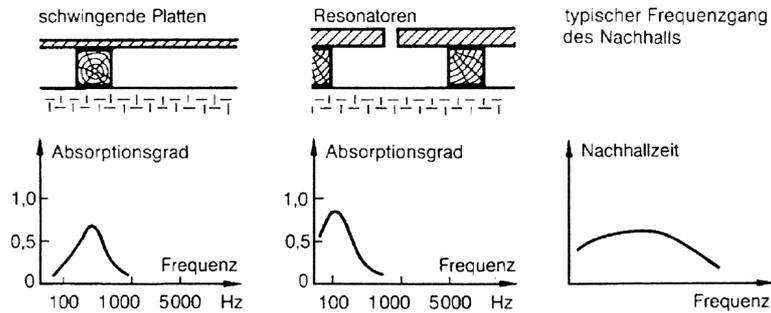


Abbildung 3.18: Beispiele für Tiefenabsorber und ihre Wirkung auf die Nachhallzeit.

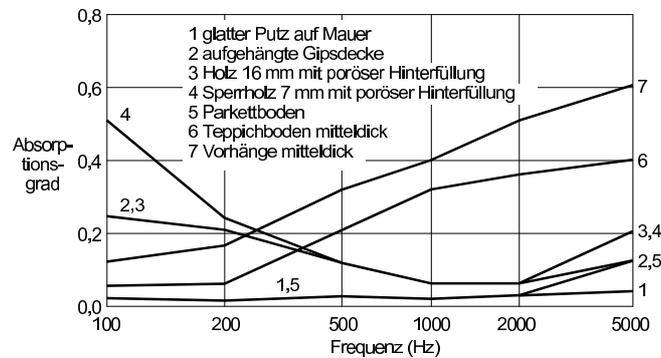


Abbildung 3.19: Schallabsorptionsgrade für verschiedene Oberflächen.

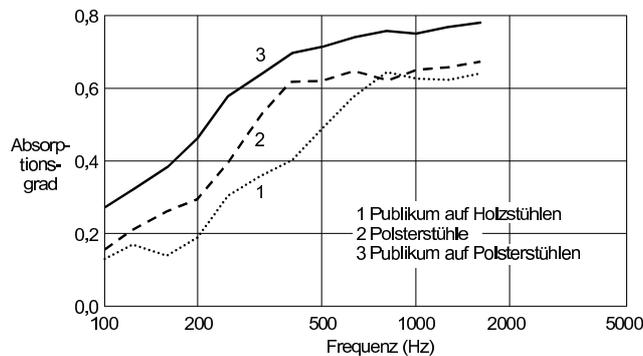


Abbildung 3.20: Schallabsorptionsgrade für eine bestuhelte Fläche.

3.8 Buchempfehlung und Quellennachweis

Als Fachbuch sei Ihnen empfohlen: **Ivar Veit**, *Technische Akustik*, Vogelfachbuch, Kamprath-Reihe, ISBN 3-8023-1707-6

Dem Buch sind entnommen: Abbildung 3.2, 3.3, 3.4, 3.7 und 3.8.

Folgendes wurde dem Buch von **Michael Dickreiter**, *Mikrofon-Aufnahmetechnik*, erschienen im Hirzel-Verlag, entnommen: Abbildung 3.16, 3.17, 3.18, 3.19 und 3.20.

Kapitel 4

Optik

Das für uns sichtbare Licht stellt nur einen kleinen Bereich elektromagnetischer Wellen dar. Die uns umgebenden elektromagnetischen Wellen umfassen einen Wellenlängenbereich von mindestens 22 Zehnerpotenzen. Sie reichen von den langwelligigen Telegrafiewellen bis zu den kurzwelligen kosmischen Strahlen. Das menschliche Auge kann aus diesem Spektrum nur Wellenlängen von etwa 390 bis 770 nm wahrnehmen, was in etwa 0,3 Zehnerpotenzen ausmacht. Im Vergleich dazu, das menschliche Ohr kann Schallwellen über einen Frequenzbereich (Wellenlängenbereich) von etwa 3 Zehnerpotenzen wahrnehmen.

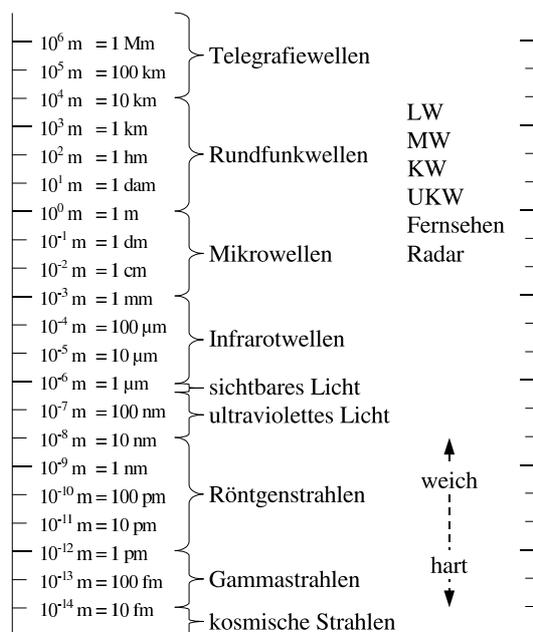


Abbildung 4.1: Einteilung elektromagnetischer Wellen in Frequenzbänder.

Die Optik beschäftigt sich im engeren Sinne mit dem sichtbaren Licht. Sie kann aber auch auf andere Bereiche der Physik angewendet werden. Viele der hier gewonnenen Kenntnisse tauchen wieder bei schnellen Elektronen, Röntgenphotonen und anderen Quanten auf. Hier wollen wir uns aber mit der Optik im engeren Sinne, also mit sichtbarem Licht beschäftigen.

Aufgabe 4.1 Bestimmen Sie für die in Abbildung 4.1 angegebenen Wellenlängen die dazugehörigen Frequenzen, und schreiben Sie einige davon rechts neben die Abbildung. Lichtgeschwindigkeit in Luft: ca. $3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$.

4.1 Licht und Farbe

4.1.1 Farben und Wellenlängen

Wir nähern uns intuitiv dem Thema Licht und stellen uns zunächst die Frage: Worin unterscheiden sich die Farben des Lichts? Das sichtbare Licht deckt, wenn auch nur einen kleinen, so doch immer noch einen

Wellenlängenbereich von etwa 390 bis 770 nm ab. Die unterschiedlichen Wellenlängen in diesem Bereich nehmen wir als Farben wahr. Die Farben des Regenbogens haben jeweils eine eindeutige Wellenlänge. Die Farben gehen mit der Wellenlänge fließend von violett über blau, grün, gelb, orange bis ins rot über, siehe Abbildung 4.2.

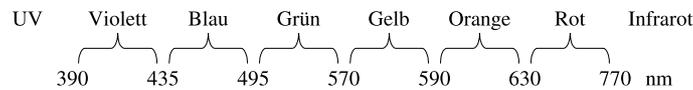


Abbildung 4.2: Richtwerte für die Wellenlängen der (Grund-) Farben.

Werden diese Farben untereinander gemischt, so entstehen weitere Farben wie rosa, braun, grau, weiß etc.

4.1.2 Das menschliche Auge

Das menschliche Auge hat auf der Netzhaut zwei Arten von Lichtrezeptoren: *Zapfen* und *Stäbchen*. Im Zentrum unseres Sehfeldes dominieren die Zapfen, am Rand die Stäbchen.

Die *Stäbchen*, die den äußeren Bereich des Blickfelds dominieren, sind empfindlicher, und sorgen dafür, dass wir auch bei starker Dämmerung noch etwas sehen können. Die Empfindlichkeit passt sich dabei mit etwas Zeitverzögerung der aktuellen Helligkeit an. (Dabei wird das Vitamin A für die Steigerung der Empfindlichkeit benötigt. Bei einem Mangel an Vitamin A lässt die Sehfähigkeit bei Dämmerung nach.) Die Stäbchen können keine Farben unterscheiden. Normalerweise sind die Stäbchen bei etwa 520 nm am empfindlichsten.

Bei den *Zapfen* gibt es drei Arten, die auf die Wellenlängen der Farben rot, grün und blau reagieren. Abbildung 4.3 zeigt die Empfindlichkeitskurven der drei Rezeptoren. (Bei den Kurven handelt es sich zunächst um die Absorptionseigenschaften der Rezeptoren, die physiologische Bewertung kann noch etwas anders aussehen.) Trifft eine elektromagnetische Welle mit einer Wellenlänge von z. B. 600 nm auf das Auge, so werden vor allem die Rezeptoren für die rote Farbe angeregt; die Rezeptoren für grün nehmen auch etwas wahr, während die Rezeptoren für die Farbe Blau nicht reagieren. Die Rezeptoren für die rote Farbe nehmen neben den Wellenlängen um 600 nm noch einen Bereich um 440 nm wahr.

Jede von dem Auge wahrgenommene Farbe setzt sich aus den Komponenten B , G und R zusammen. Die Summe der drei Komponenten macht die wahrgenommene Helligkeit aus, das Verhältnis der Komponenten zueinander den Farbton. Ein Farbton kann auch bei verschiedenen Helligkeiten gleich sein, wenn das Verhältnis der drei Komponenten gleich ist. Wir führen deshalb die relativen Farben b , g und r ein:

$$b = \frac{B}{B + G + R} \quad g = \frac{G}{B + G + R} \quad r = \frac{R}{B + G + R}$$

Da die Summe der drei relativen Farbkomponenten immer eins ergibt, $r + g + b = 1$, kann eine Farbe mit nur zwei Zahlen beschrieben werden. Die dritte ergibt sich aus der Ergänzung der anderen beiden zu eins.

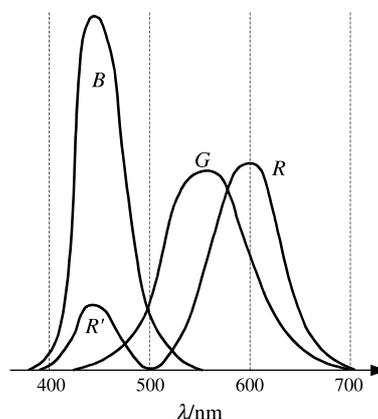


Abbildung 4.3: Empfindlichkeitskurven der drei Farbrezeptoren im menschlichen Auge.

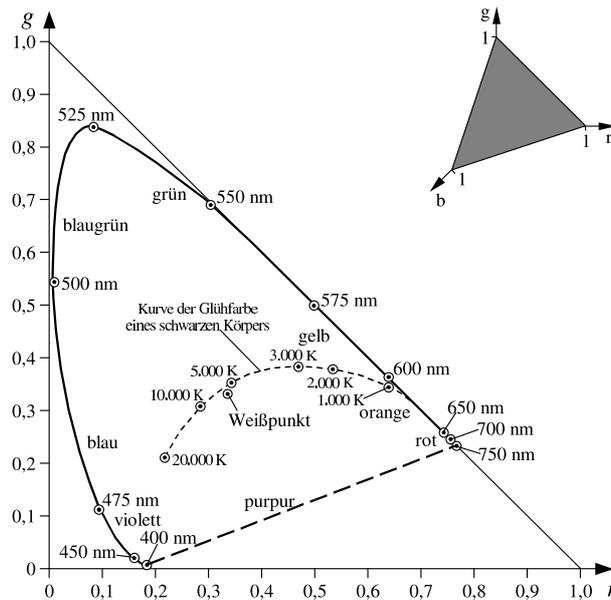


Abbildung 4.4: Das Farbdreieck.

Farbe	-	Komplementärfarbe
Blauviolett	-	Gelb
Indigo	-	Orange
Zyan	-	Rot
Grün	-	Magenta
Gelb	-	Blauviolett
Orange	-	Indigo
Rot	-	Zyan
Magenta	-	Grün

Tabelle 4.1: Liste einiger Komplementärfarben.

4.1.3 Das Farbdreieck

Im *Farbdreieck* werden die rote und grüne relative Farbkomponente, r und g , in ein Koordinatensystem eingetragen. Da die drei Farbkomponenten immer positiv sind, und die Summe eins beträgt, liegen die möglichen Farben irgendwo in einem Dreieck mit den Koordinaten $0/0$, $0/1$ und $1/0$. Die blaue Komponente ergibt sich dabei aus dem kürzesten Abstand zur begrenzenden Diagonalen mal die Quadratwurzel aus zwei. Alle monochromatischen Wellen (400 bis 750 nm) ergeben in diesem Koordinatensystem eine lückenlose Linie, deren Enden mit einer Mischfarblinie, der *Purpurgeraden* verbunden werden, siehe Abbildung 4.4.

Alle möglichen wahrnehmbaren Mischfarben befinden sich innerhalb der Linie der monochromatischen Farben. Mit zwei monochromatischen Farben können alle Mischfarben entlang der Geraden zwischen ihnen erzeugt werden. Verläuft die Gerade durch den Weißpunkt, so bezeichnet man die beiden monochromatischen Farben an den Enden der Gerade als Komplementärfarben. Mit einem komplementären Farbenpaar kann die Farbe weiß gemischt werden. Wird einer weißen Mischfarbe eine monochromatische Farbe entzogen, so bleibt die Komplementärfarbe übrig. In Tabelle 4.1 ist eine Liste von Komplementärfarben zusammengestellt.

4.1.4 Schwarze Körper

Trifft Lichtstrahlung auf eine Oberfläche, so wird ein Teil davon absorbiert. Der Absorptionsgrad, α , beschreibt den Anteil der eintreffenden Strahlung, der an der Oberfläche absorbiert wird. Der Absorptionsgrad ist eine Funktion der Wellenlänge, $\alpha = \alpha(\lambda)$, bzw. der Frequenz, $\alpha = \alpha(\nu)$. Wird *eine* Wellenlänge vollständig absorbiert ($\alpha(\lambda_1) = 1$), so spricht man von „schwarz für die Wellenlänge λ_1 “. Werden alle Wellenlängen vollständig absorbiert ($\alpha(\lambda) = 1$), so spricht man einfach von „schwarz“.

Ein schwarzer Körper kann durch einen Hohlraum mit einer kleinen Öffnung nachgebildet werden.

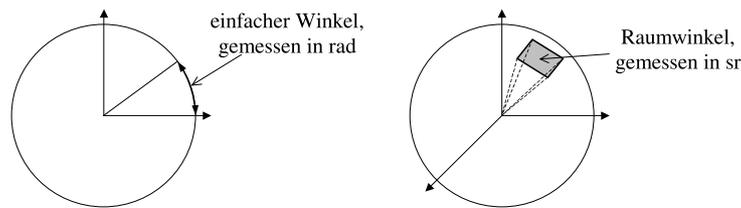


Abbildung 4.5: Einfacher Winkel auf Einheitskreis und Raumwinkel auf Einheitskugel.

Dringt eine Welle durch die Öffnung in den Hohlraum, so wird bereits bei der ersten Reflexion ein Teil absorbiert. Der reflektierte Anteil hat aber aufgrund der kleinen Öffnung kaum eine Chance wieder den Hohlraum zu verlassen, und wird immer wieder reflektiert, bis er vollständig absorbiert wird.

Ein schwarzer Körper ist der beste Absorber; jegliche ankommende Strahlung wird vollständig absorbiert. Das Gegenstück dazu ist der *schwarze Strahler*, der auch *Hohlraumstrahler* genannt wird. Bei gegebener Temperatur liefert er die maximale Abstrahlung. Er erzeugt ein definiertes Spektrum, auf das hier nicht weiter eingegangen werden soll. Die resultierende Farbe im Farbdreieck ist in Abbildung 4.4 eingetragen.

Glühendes Metall kann näherungsweise durch einen schwarzen Körper beschrieben werden. Anhand der Farbe eines glühenden Metallstücks kann seine Temperatur bestimmt werden.

Eine Glühlampe hat im Spektrum sein Intensitätsmaximum im roten bis infraroten Bereich. Ein Großteil der emittierten Strahlung ist damit für das menschliche Auge unsichtbar. Das erklärt den schlechten Wirkungsgrad und den warmen Farbton von Glühlampen.

Bezogen auf einen schwarzen Körper hat die Sonne eine Temperatur von etwa 5800 °K, was in etwa dem empfindlichsten Bereich des menschlichen Auges entspricht.

4.2 Kenngrößen von Strahlung und Licht

In diesem Abschnitt wollen wir zum einen auf die physikalischen Eigenschaften von Licht eingehen. Da geht es um absolute messbare Werte wie Leistung, Energie etc. Die physikalischen Größen gelten unabhängig von der Art des Empfängers.

Wenn es um praktische Fragen der Beleuchtung geht, reichen die physikalischen Größen nicht aus. Deshalb gehen wir zum anderen der Frage nach, wie das menschliche Auge auf die Strahlung reagiert, und führen physiologische Kenngrößen ein.

Bevor wir aber auf die verschiedenen Kenngrößen eingehen, wollen wir zunächst *Raumwinkel* beleuchten und den *Zusammenhang* zwischen physikalischen und physiologischen Kenngrößen betrachten.

4.2.1 Der Raumwinkel

Wird ein *einfacher Winkel* in *rad* gemessen, so beschreibt dieser Wert die Länge einer Strecke auf dem Einheitskreis (mit Radius 1), siehe Abbildung 4.5 links. Auf einer Kugel mit Radius 1, der Einheitskugel, ergibt ein einfacher Winkel eine gerade Linie mit der Länge des Winkels in *rad*.

Betrachtet man einen Gegenstand, so kann über Größe und Abstand zum Gegenstand der Winkel berechnet werden, den er für das Auge abdeckt. Befindet sich der Betrachter 1 m vor einem Objekt, so entspricht bei kleinen Objekten die Objektgröße in Meter dem abgedeckten Winkel in *rad*. Entfernt sich der Betrachter von dem Objekt, so wird der abgedeckte Winkel entsprechend kleiner.

Der *Raumwinkel* wird in *sterad*, oder kurz *sr* gemessen, und ist das zweidimensionale Gegenstück zum einfachen Winkel. Der Raumwinkel wird benötigt, um eine Fläche auf einen Punkt zu projizieren. Das *sterad* beschreibt die Fläche, die ein Objekt aus Sicht des untersuchten Punktes, auf der um den Punkt gelegten Einheitskugel abdeckt.

Genauso wie die Oberfläche der Einheitskugel 4π beträgt, so sind 4π *sr* nötig, um alle Richtungen um einen Punkt abzudecken. Von daher ist der Raumwinkel auf Zahlenwerte zwischen null und 4π beschränkt.

Das *sterad* ist genauso wie das *rad* eine Hilfseinheit. Wenn Sie in einer Rechnung die Einheiten mit verfolgen, so müssen Sie häufig den Raumwinkel ohne Einheit behandeln. In den in diesem Skript aufgeführten Formeln wurde aber versucht, jeweils auch diese Einheit korrekt mitzuführen.

Liegt eine bekannte Fläche, A , auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r , so deckt die Fläche aus Sicht des Kugelmittelpunktes einen Raumwinkel von $1\text{sr} \cdot A/r^2$ ab. Handelt es sich um eine ebene

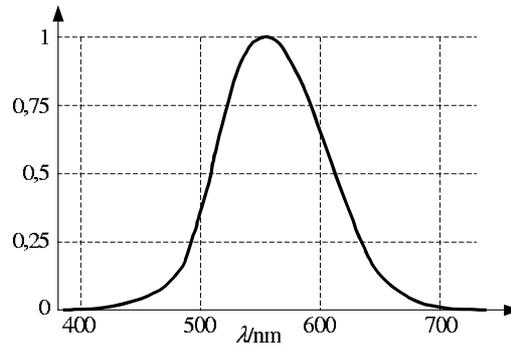


Abbildung 4.6: Relative spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Auges.

Fläche, so kann dieser Zusammenhang immer noch angewendet werden, wenn der Radius relativ groß im Verhältnis zum Flächendurchmesser ist, und die Fläche eine Tangente der Kugel darstellt. Es gilt:

$$d\Omega = \frac{dA_{\perp} \cdot 1\text{sr}}{r^2}$$

Steht die Fläche mit ihrer Normalen in einem Winkel ϑ zur Kugelmittle so gilt allgemeiner:

$$d\Omega = \frac{dA \cos \vartheta \cdot 1\text{sr}}{r^2}$$

Aufgabe 4.2 Welchen Raumwinkel deckt ein $1,5\text{m} \times 1\text{m}$ Fenster für einen Betrachter in 10m Entfernung ab?

Aufgabe 4.3 Wir sehen den Sonnendurchmesser unter einem Winkel von $30'$ ($1^{\circ} = 60'$). Unter welchem Raumwinkel erscheint die Sonnenscheibe?

4.2.2 Zusammenhang zwischen physikalischen und physiologischen Kenngrößen

Bei den physiologischen Größen wird der Teil der Strahlung bewertet, der von unserem Auge wahrgenommen wird. Bei der physiologischen Betrachtung spricht man von der *Photometrie*. Zum Beispiel wird die Wellenlänge 550 nm deutlich höher bewertet als 400 nm , da unser Auge erstere wesentlich besser wahrnimmt. Der Zusammenhang zwischen physikalischen und physiologischen Kenngrößen erfolgt über die spektrale Empfindlichkeitskurve, siehe Abbildung 4.6.

Für fast alle physikalischen Kenngrößen gibt es ein physiologisches Gegenüber und umgekehrt. Im folgenden Abschnitt werden deshalb physikalische und physiologische Kenngrößen parallel erläutert. Da, wo für die physikalischen und physiologischen Kenngrößen die gleichen Buchstaben verwendet werden, kennzeichnen wir die physikalischen Größen mit dem Index S (Strahlung) und die physiologischen Kenngrößen mit dem Index L (Licht).

Während man sich bei den physikalischen Kenngrößen nur der bekannten Einheiten wie Joule, Watt, Meter und Sekunde bedient, werden für die physiologischen Kenngrößen drei weitere Einheiten eingeführt:

1. Das Lumen (lm) gibt den Lichtstrom wieder, also die Menge an Licht pro Zeit.
2. Das Candela (cd , *neue Kerze*) misst den Lichtstrom pro Raumwinkel.
3. Das Lux (lx) gibt den Lichtstrom pro Fläche wieder.

4.2.3 Physikalische und physiologische Kenngrößen

Strahlungsenergie W , gemessen in J	Lichtmenge Q , gemessen in lm s
Bezeichnet die aufaddierte Menge an Strahlung/Licht. Beispiel: Eine Glühlampe sendet über eine Zeit Δt die Strahlungsenergie W , bzw. die Lichtmenge Q aus.	
$W = \int \Phi_S dt$	$Q = \int \Phi_L dt$

Strahlungsfluss Φ_S , gemessen in W	Lichtstrom Φ_L , gemessen in lm
Bezeichnet die Strahlungsenergie/Lichtmenge, die pro Zeiteinheit fließt.	
$\Phi_S = \frac{dW}{dt}$	$\Phi_L = \frac{dQ}{dt}$

spezifische Ausstrahlung R_S , gemessen in W/m^2	spezifische Lichtausstrahlung R_L , gemessen in lm/m^2
Gibt den Strahlungsfluss/Lichtstrom einer Quelle pro Flächeneinheit wieder. Diese Größe ist z.B. für die Entwicklung von Scheinwerfern wichtig. Um einen engen kräftigen Lichtkegel zu erzeugen, ist eine Quelle mit hoher spezifischer (Licht-) Ausstrahlung nötig. Mit A für die Fläche der Quelle folgt:	
$R_S = \frac{d\Phi_S}{dA}$	$R_L = \frac{d\Phi_L}{dA}$

Strahlungsstärke J , gemessen in W/sr	Lichtstärke I , gemessen in cd (=lm/sr)
Bezeichnet den Strahlungsfluss/Lichtstrom pro Raumwinkel. Diese Größe ist wichtig, da die meisten Quellen, gewollt oder ungewollt, in Abhängigkeit des Abstrahlwinkels unterschiedliche Intensitäten abgeben. Für eine gerichtete Quelle ist die Strahlungsstärke/Lichtstärke in Vorwärtsrichtung aussagekräftiger als der gesamte Strahlungsfluss/Lichtstrom. Sie ergibt sich aus:	
$J = \frac{d\Phi_S}{d\Omega}$	$I = \frac{d\Phi_L}{d\Omega}$

Strahlungsdichte B_S , gemessen in W/m^2sr	Leuchtdichte B_L , gemessen in cd/m^2
Gibt die spezifische (Licht-) Ausstrahlung pro Raumwinkel an. Sie wird verwendet, wenn die spezifische (Licht-) Ausstrahlung in Abhängigkeit des Abstrahlungswinkels angegeben werden soll.	
$B_S = \frac{dR_S}{d\Omega}$	$B_L = \frac{dR_L}{d\Omega}$
Steht das Flächenelement dA_{\perp} senkrecht zur Strahlungsrichtung, so gilt:	
$B_S = \frac{dJ}{dA_{\perp}}$	$B_L = \frac{dI}{dA_{\perp}}$

Intensität oder Strahlungsflussdichte D_S , gemessen in W/m^2	Intensität oder Lichtstromdichte D_L , gemessen in lx (=lm/m ²)
Gibt die Intensität der Strahlung/des Lichts an irgendeiner Stelle im Raum wieder. Wenn das Flächenelement dA_{\perp} senkrecht zur (Licht-) Strahlungsrichtung steht gilt:	
$D_S = \frac{d\Phi_S}{dA_{\perp}}$	$D_L = \frac{d\Phi_L}{dA_{\perp}}$
Mit dem Winkel ϑ zwischen Flächennormale und (Licht-) Strahlungsrichtung gilt:	
$D_S = \frac{d\Phi_S}{dA \cos \vartheta}$	$D_L = \frac{d\Phi_L}{dA \cos \vartheta}$
Mit r für den Abstand zu einer Punktquelle gilt:	
$D_S = \frac{J \cdot 1sr}{r^2}$	$D_L = \frac{I \cdot 1sr}{r^2}$

Bestrahlungsstärke oder Bestrahlungsdichte E_S , gemessen in W/m^2	Beleuchtungsstärke oder Beleuchtungsdichte E_L , gemessen in lx
Bezeichnet den Strahlungsfluss/Lichtstrom pro Fläche, der sich auf einer Ebene ergibt, wenn die Strahlung/das Licht unter einem Winkel ϑ abweichend von der Normalen auftrifft:	
$E_S = D_S \cdot \cos \vartheta = \frac{J \cdot 1sr}{r^2} \cos \vartheta$	$E_L = D_L \cdot \cos \vartheta = \frac{I \cdot 1sr}{r^2} \cos \vartheta$

Bestrahlung , gemessen in J/m^2	Beleuchtung , gemessen in lx s
Gibt die Strahlungsenergie/Lichtmenge wieder, die pro Fläche bestrahlt/beleuchtet wurde:	
$\int E_S dt$	$\int E_L dt$

Eine weitere Kenngröße ist der **Beleuchtungswirkungsgrad** η . Er berücksichtigt, dass ein Teil des ausgestrahlten Lichtstroms von Flächen im Raum verschluckt wird.

In Tabelle 4.2 sind noch mal die Kenngrößen für Strahlung und Licht zusammengetragen. Die Spalte in der Mitte gibt an, wo die jeweiligen Kenngrößen verwendet werden.

Physikalisch: Strahlung			Ort	Physiologisch: Licht		
Größe	Symbol	Einheit		Größe	Symbol	Einheit
Strahlungsenergie	W	J	allgemein	Lichtmenge	Q	Lumensek. = lm s
Strahlungsfluss	Φ_S	W		Lichtstrom	Φ_L	Lumen = lm
Spezifische Ausstrahlung	R_S	W/m ²	Quelle	Spezifische Lichtausstrahlung	R_L	lm/m ² Phot = lm/cm ²
Strahlungsstärke	J	W/sr		Lichtstärke	I	Candela = cd = lm/sr
Strahlungsdichte	B_S	W/m ² sr	↓	Leuchtdichte	B_L	cd/m ² Stilb = cd/cm ²
Intensität Strahlungsflussdichte	D_S	W/m ²		Intensität Lichtstromdichte	D_L	Lux = lx = lm/m ²
Bestrahlungsstärke Bestrahlungsdichte	E_S	W/m ²	Absorber	Beleuchtungsstärke Beleuchtungsdichte	E_L	Lx
Bestrahlung	$\int E_S dt$	J/m ²		Beleuchtung	$\int E_L dt$	lx s

Tabelle 4.2: Kenngrößen von Strahlung und Licht.

4.2.4 Ein Beispiel

In vielen Situationen können Lichtquellen als Punktstrahler betrachtet werden, was die mathematische Behandlung vereinfacht. Des Weiteren muss geprüft werden, inwieweit eine Lichtquelle in alle Richtungen gleichmäßig strahlt. Ist das der Fall, so sind weitere Vereinfachungen möglich.

Beispielaufgabe:

Eine 3 m über den Boden montierte Lampe erzeuge einen Lichtstrom von 2000 lm, der sich gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet.

- Wie groß ist die Lichtstärke?
- Wie groß ist die Lichtstromdichte (Intensität) auf dem Boden direkt unter der Lampe?
- Wie groß ist die Beleuchtungsdichte auf dem Boden direkt unter der Lampe?
- Wie groß ist die Beleuchtungsdichte auf dem Boden drei Meter neben der Lampe?

Lösung:

a) Da sich der Lichtstrom gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet, kann dieser zur Berechnung der Leuchtdichte einfach durch den gesamten Raumwinkel von 4π dividiert werden:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{2000 \text{ lm}}{4\pi \text{ sr}} = \underline{\underline{159 \text{ cd}}}$$

b) Die Lichtstromdichte ist der Lichtstrom, der pro Fläche fließt. (Die Fläche steht dabei senkrecht zur Strahlrichtung.) Auf der Einheitskugel mit dem Radius eins ist die Lichtstromdichte gleich der Lichtstärke. Außerhalb der Einheitskugel nimmt die Lichtstromdichte mit dem Quadrat des Radius ab:

$$D_L = \frac{I \cdot 1 \text{ sr}}{r^2} = \frac{159 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}}{3 \cdot 3 \text{ m}^2} = \underline{\underline{17,7 \text{ lx}}}$$

Ein anderer Ansatz für die Lichtstromdichte ist der Gedanke, dass sich der Lichtstrom der Lampe auf der gesamten Fläche einer Kugel mit dem Radius von 3 m gleichmäßig verteilt.

$$D_L = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}} = \frac{2000 \text{ lm}}{4\pi \cdot 9 \text{ m}^2} = \underline{\underline{17,7 \text{ lx}}}$$

c) Für die Bestimmung der Beleuchtungsdichte (-stärke) muss der Winkel zwischen Flächennormale und Strahlungsrichtung bekannt sein. Die Angabe *direkt unter der Lampe* kann dabei so gewertet werden, dass der Winkel null beträgt:

$$E_L = D_L \cos \vartheta = \frac{I \cdot 1 \text{ sr}}{r^2} \cos \vartheta = \frac{159 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}}{9 \text{ m}^2} \cos 0^\circ = \underline{\underline{17,7 \text{ lx}}}$$

d) Für den Punkt auf dem Boden 3 m neben der Lampe ändert sich der Winkel und der Radius:

$$E_L = \frac{I \cdot 1 \text{ sr}}{r^2} \cos \vartheta = \frac{159 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}}{(3 \text{ m})^2 + 3 \text{ m})^2} \cos 45^\circ = \underline{\underline{6,25 \text{ lx}}}$$

Für diese Art von Aufgabe lässt sich mit h für die Höhe der Lampe über dem Boden und d für die seitliche Verschiebung des betrachteten Punktes eine andere, einfach anzuwendende Formel herleiten. Für Abstand zur Lampe und den Kosinus gilt:

$$r = \sqrt{h^2 + d^2}$$

$$\cos \vartheta = \frac{h}{r}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Beleuchtungsichte folgt:

$$E_L = \frac{I \cdot 1 \text{ sr}}{r^2} \cos \vartheta = \frac{Ih \cdot 1 \text{ sr}}{r^3} = \frac{I \cdot h \cdot 1 \text{ sr}}{\sqrt{h^2 + d^2}^3} = \frac{Ih \cdot 1 \text{ sr}}{(h^2 + d^2)^{1,5}}$$

4.2.5 Der Lambertstrahler

Wenn Sie dieses Skript in gedruckter Form vor sich liegen haben, so erscheint es Ihnen senkrecht betrachtet mit einer gegebenen Leuchtdichte B_L . Schauen Sie sich das gleiche Blatt unter einem Winkel ϑ abweichend von der Normalen an, so erscheint es mit der gleichen Leuchtdichte wie zuvor, nur dass die strahlende Fläche insgesamt um $\cos \vartheta$ kleiner geworden ist.

Allgemeiner ausgedrückt: Wir betrachten ein kleines Flächenelement A_0 mit einem Lichtstrom Φ_L unter einem Winkel ϑ abweichend zur Flächennormalen. Bei einem Lambertstrahler erscheint die Fläche aus allen Richtungen betrachtet gleich hell, die Leuchtdichte, B_L , ist konstant. Da aber das Flächenelement A_0 kleiner erscheint, ergibt sich eine entsprechend kleinere Lichtstärke I . Daraus folgt, der Lambertstrahler hat über den Abstrahlwinkel eine konstante Leuchtdichteverteilung und eine kosinusförmige Lichtstärkeverteilung:

$$B(\vartheta) = B_0$$

$$I(\vartheta) = I_0 \cos \vartheta$$

Beispielaufgabe:

Um eine ideale Glühlampe (Abstrahlung gleichmäßig in alle Richtungen) mit einem Lichtstrom von 1000 lm wird eine 100 % transparente und matte Kugel mit Radius 10 cm angebracht. Wie groß ist die Leuchtdichte?

Lösung:

Die Glühlampe erzeugt eine Lichtstärke von $1000 \text{ lm}/4\pi$. Durch die 100 % transparente, matte Kugel (Lambertstrahler) wird diese Lichtstärke auf die Querschnittsfläche der Kugel von $\pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ verteilt. Es entsteht eine Leuchtdichte von:

$$B_L = \frac{I}{A} = \frac{1000 \text{ lm}/4\pi \text{ sr}}{\pi \cdot 0,01 \text{ m}^2} = \frac{25\,000}{\pi^2 \text{ sr}} = \underline{\underline{2\,533 \text{ cd}/\text{m}^2}}$$

Aufgabe 4.4 Wie weit muss eine Lampe mit einer Lichtstärke von 600 cd von einer Fläche entfernt sein, die mit 100 lx beleuchtet werden soll und deren Normale 25° gegen die Strahlrichtung geneigt ist?

Aufgabe 4.5 Ein Projektor strahlt einen Lichtstrom von 1000 lm auf eine 30 m entfernte Leinwand der Größe 3 m \times 4 m.

- Wie groß ist die Lichtstärke in Richtung Leinwand?
- Wie groß ist die mittlere Beleuchtungsstärke der Leinwand?

Aufgabe 4.6 Eine Kugelleuchte, die nach allen Seiten die gleiche Lichtstärke 135 cd besitzt, hängt 2,4 m über dem Boden eines Zimmers. Welche Belichtungsstärke entsteht durch direktes Licht

- senkrecht unter der Lampe auf dem Boden?
- senkrecht unter der Lampe auf einem 0,8 m hohen Tisch?
- auf einem 3 m seitlich gelegenen Punkt auf dem Boden?
- auf dem Tisch, wenn er 3 m zur Seite gerückt wird?

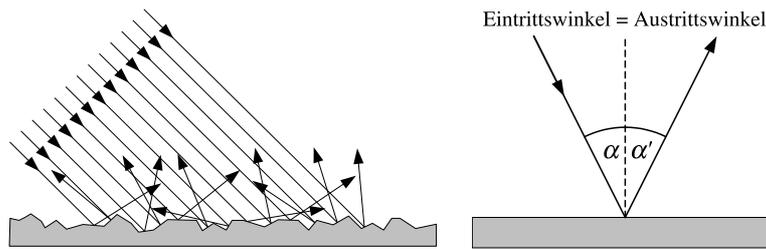


Abbildung 4.7: Diffuse und gesetzmäßige Reflexion.

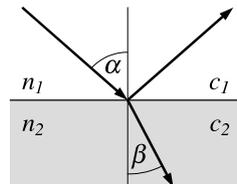


Abbildung 4.8: Reflexion und Brechung am Übergang zu einem dichteren Medium.

Aufgabe 4.7 Eine 100 W-Glühlampe ($\Phi=1450 \text{ lm}$) soll zur Verminderung der Blendung mit einer Milchglaskugel umgeben werden, deren Glas 15 % des Lichts absorbiert. Wie groß muss die Kugel sein, damit die Leuchtdichte nur noch 4000 cd/m^2 beträgt?

Aufgabe 4.8 Straßenlampen der Höhe 5 m stehen im Abstand von 50 m.

a) Wie groß muss die Lichtstärke der Lampen sein, damit in der Mitte zwischen den Lampen die Beleuchtungsstärke 3 lx ist?

b) Wie groß ist die Beleuchtungsstärke unter einer Lampe, wenn die Lichtstärke in alle Richtungen dieselbe ist?

Aufgabe 4.9 Eine $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ große Fläche wird von einer 5 m entfernten Glühlampe senkrecht und gleichmäßig mit der Beleuchtungsstärke 2,5 lx beleuchtet.

a) Welcher Lichtstrom fällt auf die Fläche?

b) Wie groß ist die Lichtstärke der Lampe?

c) Welchen Lichtstrom sendet die Lampe insgesamt aus, wenn sie in alle Richtungen gleichmäßig strahlt?

d) Wie groß ist ihre Leuchtdichte, wenn es sich um eine mattierte, kugelförmige Glühlampe mit dem Radius 3 cm handelt?

4.3 Strahlenoptik

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche, so wird er reflektiert, absorbiert, transmittiert, oder eine Kombination davon. In diesem Abschnitt legen wir einen besonderen Fokus auf Reflexion und Transmission.

4.3.1 Reflexion

Im Idealfall reflektiert ein Reflektor 100 % des eintreffenden Lichts. Je nach Beschaffenheit der Oberfläche des Reflektors wird das Licht diffus, oder gesetzmäßig reflektiert. Bei der diffusen Reflexion wird ein eintreffender paralleler Lichtstrahl durch eine raue Oberfläche in unterschiedliche Richtungen reflektiert, siehe Abbildung 4.7 links. Bei der gesetzmäßigen Reflexion wird das eintreffende Licht mit gleichem Winkel zur Normalen des Reflektors gespiegelt, siehe Abbildung 4.7 rechts.

4.3.2 Brechung

Trifft Licht auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit anderer Lichtgeschwindigkeit, so wird ein Teil des Lichts reflektiert. Der andere Teil dringt in das andere Medium ein, und ändert dabei seine Richtung, hier gilt die allgemeine Gleichung für die Brechung:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Dabei ist n_i der Brechungsindex (oder die Brechzahl) des Mediums i mit $n_i = c/c_i$. In Worten: Der Brechungsindex eines Mediums ist der Faktor, um den die Lichtgeschwindigkeit des Mediums kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Beispiele einiger Brechungsindizes: 1,00 für Luft, 1,33 für Wasser, 1,51 bis 1,61 für Kronglas, 1,61 bis 1,75 für Flintglas und 2,42 für Diamant.

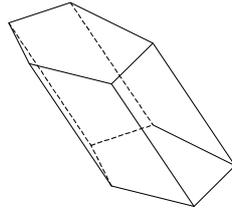


Abbildung 4.9: Ein allgemeines Prisma.

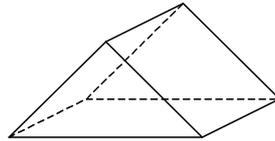


Abbildung 4.10: Prisma mit rechtwinkligem, gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche.

4.3.3 Totalreflexion

Bewegt sich Licht aus einem Medium mit höherer Brechzahl in eins mit geringerer Brechzahl, so tritt ab einem bestimmten Winkel die Totalreflexion ein. Das heißt, das Licht wird zu 100 % reflektiert, und dringt nicht in das andere Medium ein. Dieses Phänomen findet z.B. im Lichtfaserleiter eine praktische Anwendung.

4.3.4 Dispersion

Der Brechungsindex, n , ist eine Funktion der Wellenlänge, bzw. Frequenz des Lichts. Das langwellige Rot verhält sich anders als das kurzwellige Blau. Wird weißes Licht beim Übergang in ein anderes Medium gebrochen, so werden die Farben unterschiedlich von ihrer ursprünglichen Bahn abgelenkt und es werden die Spektralfarben sichtbar. Mit n_F als den Brechungsindex für blau und n_C als den für rot wird die Dispersion, Δ , wie folgt definiert:

$$\Delta = n_F - n_C$$

(Die Indizes F und C sind Kennbuchstaben der Fraunhoferschen Linien.) Die Dispersion ist nicht proportional zum Brechungsindex. Daher können durch geeignete Kombination von Materialien unterschiedlicher Dispersion die Effekte kompensiert werden. Beispiel: achromatisches Prisma und geradsichtiges Prisma.

4.3.5 Prismen

Mathematisch ist ein Prisma ein Körper, der an zwei Seiten durch identische, parallele und gleichausgerichtete Vielecke begrenzt ist. Die anderen Seiten werden durch die Parallelogramme, die sich aus den zwei entsprechenden Kanten der Vielecke ergeben, begrenzt (siehe Abbildung 4.9).

In der Optik werden hauptsächlich Prismen mit Dreiecken als begrenzende Vielecke verwendet. Wird das Prisma als Spiegel verwendet, handelt es sich bevorzugt um rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke, siehe Abbildung 4.10.

Bei einem Prisma nennt man den von der Ein- und Austrittsfläche eingeschlossenen Winkel den Prismawinkel φ und C die brechende Kante des Prismas. Ein monochromatischer Lichtstrahl, der durch das Prisma dringt (und nicht reflektiert wird), wird in seiner Richtung durch zwei Brechungsvorgänge abgelenkt. (Weißes Licht würde aufgrund der Dispersion, siehe Abschnitt 4.3.4, in seine Spektralfarben aufgefächert.) Mit den Bezeichnungen in Abbildung 4.11 ergibt sich aus geometrischen Überlegungen:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2 \quad \text{und} \quad \delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi$$

Die minimalste Ablenkung entsteht, wenn der Strahl symmetrisch durch das Prisma dringt. In diesem Fall ist $\beta_1 = \beta_2 = \varphi/2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$, und es folgt für das Brechungsgesetz:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\delta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad (\text{bei symmetrischer Anordnung})$$

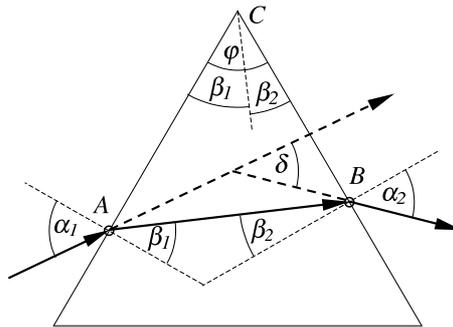


Abbildung 4.11: Verlauf eines Lichtstrahls in einem Prisma.

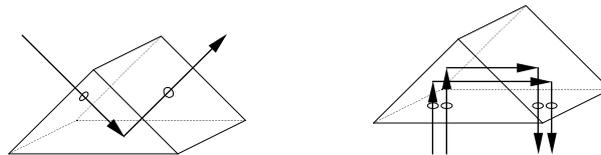


Abbildung 4.12: Verwendung eines Prismas als Einfach- oder Doppelspiegel.

Prismen werden häufig auch als Spiegel eingesetzt. Je nach Anordnung kann ein Prisma mit dreieckiger, rechtwinkliger, gleichschenkliger Grundfläche einen Lichtstrahl einfach oder zweifach reflektieren, siehe Abbildung 4.12.

Aufgabe 4.10 Unter welchem Winkel muss ein Lichtstrahl auf eine Wasseroberfläche fallen, damit gebrochener und reflektierter Teilstrahl senkrecht aufeinander stehen (Brewster-Winkel)?

Aufgabe 4.11 Einfarbiges Licht fällt senkrecht auf eine Seitenfläche eines Prismas mit dem Brechungsindex 1,5 und einem Prismawinkel von 40° . Um welchen Winkel wird der Strahl insgesamt abgelenkt?

Aufgabe 4.12 Wie groß muss der Brechungsindex eines Prismas mit einer Grundfläche eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks sein, damit es als Spiegel verwendet werden kann?

4.4 Linsen

Bevor wir uns mit optischen Systemen beschäftigen, betrachten wir zunächst ausführlich das wichtigste Element einer Optik, die Linse. Nachdem wir uns über die ideale Wölbung Gedanken gemacht haben werden, wenden wir uns dann den dünnen Linsen zu, bevor wir danach dicke Linsen „unter die Lupe“ nehmen.

4.4.1 Herangehensweise

Ziel einer Linse ist es, dass ein lichtscheidender Punkt im Raum auf einen andern Punkt im Raum abgebildet wird. Der lichtscheidende Punkt, wir nennen ihn G wie Gegenstand, sendet Lichtstrahlen in alle Richtungen aus. Eine Linse hat nun die Aufgabe, einen Teil dieser Lichtstrahlen so zu bündeln, dass sich die Strahlen in einem anderen Punkt, wir nennen in B wie Bild, wieder kreuzen.

Ein geeigneter Ansatz bei der Gestaltung von Linsen wäre nun, sich über Lage und Ausrichtung von Brechkanten Gedanken zu machen, die dafür sorgen, dass alle Lichtstrahlen wieder in einem Punkt landen. Mit etwas Aufwand würden wir damit zum Ziel gelangen. Hier wählen wir aber eine andere Herangehensweise:

Für die Herleitung einer geeigneten Linse betrachten wir das Licht als eine Welle. Die gesendete Welle hatte im Punkt G maximale Intensität, und soll so geformt werden, dass sich im Punkt B wieder ein Maximum bildet. Das kann nur erreicht werden, wenn die Laufzeiten für die verschiedenen Wege des Lichts gleich sind. Nur dann liegen alle Teilwellen in Phase und addieren sich zu einem Maximum.

4.4.2 Brechung an geeignet gewölbten Grenzflächen

Wir betrachten den Übergang eines Lichtstrahls von Medium 1 nach Medium 2 mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . (Wir erinnern uns: $n_i = c/c_i$, siehe Abschnitt 4.3.2) Wir nehmen einen Gegenstand, G , im

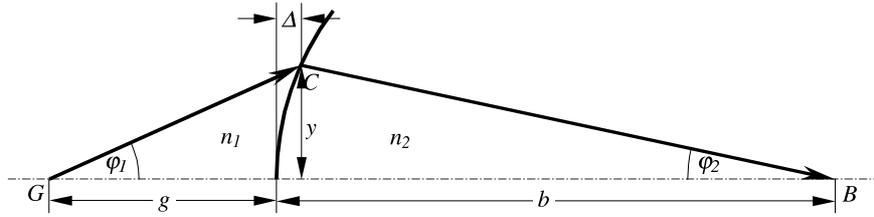


Abbildung 4.13: Übergang von Licht an einer gewölbten Grenzschicht.

Medium 1 an, der Lichtstrahlen zum Punkt B , dem Bild, hinter dem Übergang nach Medium 2 senden soll. Auf der Gerade \overline{GB} bezeichnet g den Abstand von G zum Medium 2, und b den Abstand zwischen Medium 1 und dem Zielpunkt B auf der optischen Achse.

Für die Gerade \overline{GB} benötigt der Lichtstrahl eine Zeit t_d :

$$t_d = \frac{g}{c_1} + \frac{b}{c_2} = \frac{n_1 g}{c} + \frac{n_2 b}{c} \quad \text{daraus folgt:} \quad t_d c = n_1 g + n_2 b$$

Als nächstes soll dafür gesorgt werden, dass auch die Lichtstrahlen, die von G aus mit einem Winkel φ_1 starten, den Zielpunkt B erreichen. Das ist dann möglich, wenn die Laufzeit der Lichtstrahlen die gleiche ist, wie im horizontalen Fall. Die Laufzeit des Lichts kann durch horizontales Verschieben des Übergangs von Medium 1 nach Medium 2 erreicht werden. Wenn die Strecke im langsameren Medium zu Gunsten des schnelleren Mediums verkürzt wird, so ergibt sich in Summe eine kürzere Laufzeit. Wir definieren C als den Übergangspunkt von Medium 1 nach Medium 2, y als den Abstand von C zur Gerade \overline{GB} , und Δ als die Verschiebung von C parallel zu \overline{GB} damit die gleiche Laufzeit erzielt wird. Es folgt:

$$t_d(y) \cdot c = n_1 \cdot \overline{GC} + n_2 \cdot \overline{CB} = n_1 \sqrt{(g + \Delta)^2 + y^2} + n_2 \sqrt{(b - \Delta)^2 + y^2}$$

Damit die Fokussierung nach B erfolgt, muss die Laufzeit für alle y gleich sein. Es folgt:

$$t_d(y = 0) = t_d(y)$$

$$n_1 g + n_2 b = n_1 \sqrt{(g + \Delta)^2 + y^2} + n_2 \sqrt{(b - \Delta)^2 + y^2}$$

Es sei dem fleißigen Studenten überlassen Seiten zu füllen und diese Gleichung nach Δ aufzulösen. Das Ergebnis ist ein Polynom vierter Ordnung. In der Praxis sind solche Oberflächen nur schwer herzustellen, und man weicht auf Linsen mit kugelförmiger Oberfläche aus.

4.4.3 Brechung an sphärischen Grenzflächen

Wir lösen die gefundene Gleichung aus Abschnitt 4.4.2 indem wir zunächst das Quadrat innerhalb der Wurzel ausmultiplizieren:

$$n_1 g + n_2 b = n_1 \sqrt{g^2 + 2g\Delta + \Delta^2 + y^2} + n_2 \sqrt{b^2 - 2b\Delta + \Delta^2 + y^2}$$

Nun nehmen wir an, dass sich die Punkte G und B jeweils weit von dem Übergang zwischen den Medien befinden. Aufgrund dessen ist jeweils der erste Summand in den Wurzeln deutlich größer als die anderen. Allgemein gilt für $a \gg \varepsilon$:

$$(a + \varepsilon)^n \approx a^n + n a^{n-1} \varepsilon$$

bzw.

$$\sqrt{a + \varepsilon} = (a + \varepsilon)^{0,5} \approx a^{0,5} + 0,5 a^{-0,5} \varepsilon = \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}$$

Wir wenden diese Näherung auf die Wurzeln an:

$$\begin{aligned} n_1 g + n_2 b &= n_1 \left(g + \frac{2g\Delta + \Delta^2 + y^2}{2g} \right) + n_2 \left(b + \frac{-2b\Delta + \Delta^2 + y^2}{2b} \right) \\ n_1 \frac{2g\Delta + \Delta^2 + y^2}{2g} + n_2 \frac{-2b\Delta + \Delta^2 + y^2}{2b} &= 0 \end{aligned}$$

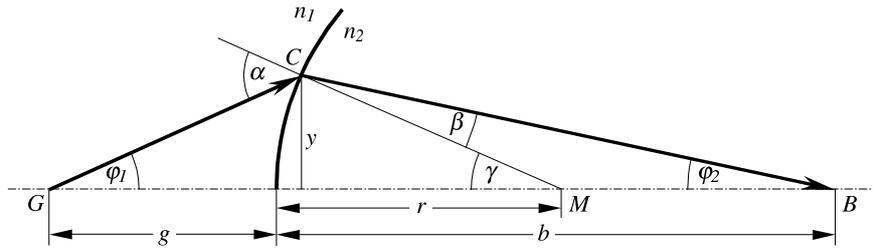


Abbildung 4.14: Übergang von Licht an einer kugelförmigen Grenzschicht.

$$\begin{aligned} \Delta n_1 + \Delta^2 \frac{n_1}{2g} + \frac{n_1 y^2}{2g} - \Delta n_2 + \Delta^2 \frac{n_2}{2b} + \frac{n_2 y^2}{2b} &= 0 \\ \Delta^2 (n_1 b + n_2 g) + \Delta 2gb(n_1 - n_2) + (n_1 b y^2 + n_2 g y^2) &= 0 \\ \Delta^2 + \Delta 2gb \frac{n_1 - n_2}{n_1 b + n_2 g} + y^2 &= 0 \\ \left(\Delta + gb \frac{n_1 - n_2}{n_1 b + n_2 g} \right)^2 + y^2 &= \left(gb \frac{n_1 - n_2}{n_1 b + n_2 g} \right)^2 \\ \text{Mit } r = gb \frac{n_2 - n_1}{n_1 b + n_2 g} \text{ folgt:} & \\ (\Delta - r)^2 + y^2 &= r^2 \\ (r - \Delta)^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht der Kreisgleichung mit dem Radius r und den rechtwinkligen Koordinaten $(r - \Delta)$ und y . In Abbildung 4.14 ist der Kreisabschnitt mit seinem Mittelpunkt M eingetragen.

Eine Linse mit kugelförmiger Oberfläche lässt sich leicht herstellen. In der Mitte verhält sich eine kugelförmige Linse wie gewünscht. Zum Rand hin entstehen Abbildungsfehler, die auf die in der Rechnung durchgeführte Näherung zurückzuführen sind.

4.4.4 Brennweiten von sphärischen Übergängen

In der Berechnung wurde der Radius r eingeführt:

$$r = gb \frac{n_2 - n_1}{n_1 b + n_2 g}$$

Nach Umstellung ergibt sich:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Ausgehend von parallel eintreffender Strahlung ($g = \infty$) kreuzen sich die Strahlen hinter dem Übergang an einem Punkt, $b(g = \infty)$, der hintere Brennweite, f , genannt wird:

$$f = b(g = \infty) = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r$$

Damit die Strahlen nach der Brechung parallel weiterlaufen ($b = \infty$) müssen sie von einem Punkt, g , starten, der vordere Brennweite, F , genannt wird:

$$F = g(b = \infty) = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r$$

In Abbildung 4.15 ist die hintere und vordere Brennweite dargestellt.

Aus den letzten drei Gleichungen lassen sich folgende Zusammenhänge herleiten:

$$\frac{F}{g} + \frac{f}{b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{f}{n_2} = \frac{F}{n_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f}{F} = \frac{n_2}{n_1}$$

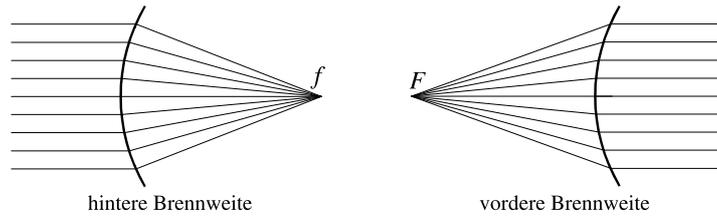


Abbildung 4.15: Definition der hinteren und vorderen Brennweite.

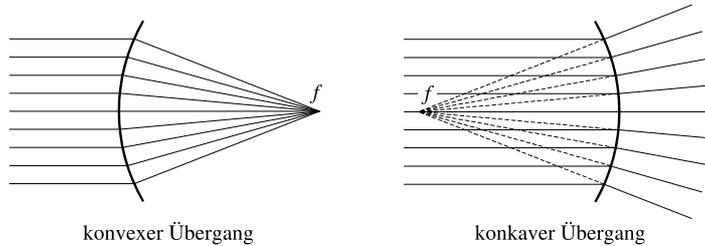


Abbildung 4.16: Hinterer Brennpunkt eines konvexen und eines konkaven Übergangs.

Wenn in unserer Betrachtung das Medium 2 den höheren Brechungsindex hat, so erhalten wir positive Radien und Brennweiten. Dies ist der Fall bei *konvexen* Übergängen: Das Medium mit dem höheren Brechungsindex wölbt sich in das andere Medium.

Im umgekehrten Fall, wenn sich das Medium mit dem geringeren Brechungsindex in das andere wölbt, so sprechen wir von einem *konkaven* Übergang. Ein konkaver Übergang zerstreut vorher parallele Strahlen, so dass sich die Strahlen nicht in einem Punkt treffen können. In diesem Fall ergibt sich ein negativer Radius, und entsprechend negative Brennweiten. Die negative Brennweite beschreibt den Punkt, an dem sich die rückwärts verlängerten Strahlen kreuzen würden, siehe Abbildung 4.16.

4.4.5 Dünne Linsen

Eine Linse besteht aus einem Medium mit einem von der Umgebung abweichendem Brechungsindex n_i . Licht, das durch eine Linse dringt, wird zweimal gebrochen: einmal beim Eintritt in die Linse, und ein zweites mal beim Austritt aus der Linse.

Wenn die beiden Übergänge im Vergleich zu den sonstigen Maßen dicht beieinander liegen, spricht man von einer dünnen Linse. In diesem Fall können die beiden Grenzflächen als eine Grenzfläche mit addierter Wirkung betrachtet werden. Wenn die beiden Grenzflächen einen Lichtstrahl um die Winkel δ_1 und δ_2 brechen, so ergibt sich ein Gesamtbrechungswinkel von $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Man nimmt dabei an, dass die Brechung in der Mitte der Linse, also genau zwischen den Grenzflächen erfolgt.

Die Brennweite ist umgekehrt proportional zum Ablenkwinkel eines achsparallelen Strahls. (Hinweis: Wir wenden hier mit $\tan \alpha \approx \alpha$ die Kleinwinkelapproximation an.)

$$f = \frac{y}{\varphi_2} \quad \text{für} \quad g = \infty$$

Daraus folgt, dass sich für die Gesamtbrennweite die Reziprokwerte addieren. Mit F_1 und f_2 als die jeweils äußeren Brennweiten der Übergänge 1 und 2 gilt:

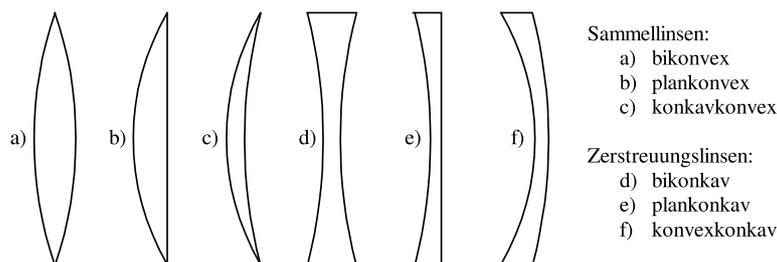


Abbildung 4.17: Benennung der Linsen nach Art der Krümmung.

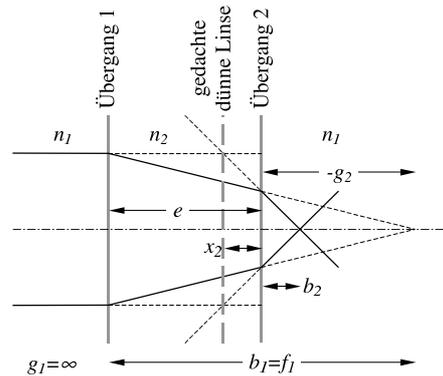


Abbildung 4.18: Strahlengang durch zwei Sammellübergänge.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{f_2} \quad \text{oder} \quad f = \frac{F_1 \cdot f_2}{F_1 + f_2}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich, dass bei dünnen Linsen die vordere und hintere Brennweite gleich ist.

In einer Umgebung mit Brechungsindex 1 gilt für eine bikonvexe Linse mit den Radien r_1 und r_2 und dem Brechungsindex n :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.1)$$

Für eine einseitig oder beidseitig konkave Linse muss der jeweilige Radius negativ eingesetzt werden.

Die reziproke Brennweite wird auch *Brechkraft* oder *Brennwert* genannt und hat die Einheit $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dp}$ (Dioptrie):

$$D = \frac{1}{f} \quad (4.2)$$

4.4.6 Dicke Linsen

Bei einer dünnen Linse wurden die Übergänge in die Linse hinein und auf der anderen Seite heraus als ein Übergang mit addierter Wirkung betrachtet. Das ist dann möglich, wenn die Abstände zu Objekt und Bild groß sind im Vergleich zur Dicke der Linse. Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so muss die Dicke der Linse berücksichtigt werden.

Die Vorgehensweise ist, dass die dicke Linse gedanklich durch eine dünne Linse mit gleicher Wirkung ersetzt wird. Leider kann dabei die dünne Linse nicht eindeutig positioniert werden. Es werden deshalb für die Berechnung zwei *Hauptebenen* bestimmt, mit deren Hilfe die optischen Eigenschaften einer dicken Linse wiedergegeben werden können.

Die *bildseitige Hauptebene* gibt die Lage einer dünnen Ersatzlinse wieder, wenn sich der abzubildende Gegenstand G unendlich weit entfernt befindet ($g = \infty$). Die *gegenstandsseitige*, oder auch *objektseitige Hauptebene* spiegelt die Lage der gedachten dünnen Linse wieder, wenn sich das entstandene Bild unendlich weit entfernt befindet ($b = \infty$). Für die anderen Abstände von G und B zur Linse ergibt sich dann ein einfacher Formalismus, der weiter unten erläutert wird.

Zunächst wollen wir die bildseitige Hauptebene bestimmen. Sie ergibt sich aus dem Schnittpunkt der verlängerten parallel eintreffenden Strahlen mit den verlängerten Strahlen hinter der Linse. In Abbildung 4.18 ist dieser Zusammenhang schematisch dargestellt.

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Umgebung einen Brechungsindex, n_1 , von eins hat, und drücken den Brechungsindex innerhalb der Linse, n_2 , einfach durch n aus. Außerdem sollen nur die äußeren Brennweiten F_1 und f_2 verwendet werden:

$$n_1 = 1 \quad n_2 = n \quad f_1 = nF_1 \quad F_2 = nf_2$$

(Den Zusammenhang zwischen vorderer und hinterer Brennweite haben wir im Abschnitt 4.4.4 hergeleitet.) Mit $g_1 = \infty$ folgt für die bildseitige Hauptebene und die hintere Brennweite:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= f_1 = nF_1 \\
 g_2 &= e - b_1 = e - nF_1 \\
 b_2 &= \frac{g_2 \cdot f_2}{g_2 - F_2} = \frac{(e - nF_1) \cdot f_2}{e - nF_1 - nf_2}
 \end{aligned}$$

Wir beschreiben die Lage der bildseitigen Hauptebene durch den Abstand zur bildseitigen Oberfläche der dicken Linse, x_2 , relativ zu der Dicke der dicken Linse, e :

$$\begin{aligned}
 \nu_2 &= \frac{x_2}{e} = \frac{b_2}{b_1 - e} = \frac{(e - nF_1) \cdot f_2}{e - nF_1 - nf_2} \cdot \frac{1}{nF_1 - e} \\
 \nu_2 &= \frac{f_2}{nF_1 + nf_2 - e}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

In einem zweiten Schritt berechnen wir die hintere Brennweite f :

$$\begin{aligned}
 f &= b_2 + \nu_2 e = \frac{(e - nF_1) \cdot f_2}{e - nF_1 - nf_2} + \frac{f_2 \cdot e}{nF_1 + nf_2 - e} = \frac{nF_1 f_2}{nF_1 + nf_2 - e} \\
 f &= \frac{F_1 f_2}{F_1 + f_2 - \frac{e}{n}}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Zur Bestimmung der *objektseitigen Hauptebene* und der vorderen Brennweite muss das Bild in unendliche Ferne verschoben werden und die gleiche Rechnung rückwärts durchgeführt werden. Da die Strahlen vorwärts wie rückwärts den gleichen Verlauf haben, kann zu diesem Zweck die dicke Linse einfach umgedreht werden. Im Ergebnis müssen dann die Brennweiten F_1 und f_2 vertauscht werden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \frac{F_1}{nF_1 + nf_2 - e} \\
 F &= f = \frac{F_1 f_2}{F_1 + f_2 - \frac{e}{n}}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Durch die Ähnlichkeit der Ergebnisse lässt sich folgender Zusammenhang herleiten:

$$\frac{f}{n} = \nu_1 \cdot f_2 = \nu_2 \cdot F_1$$

Setzt man für die Brennweiten der beiden Übergänge die Gleichungen aus Abschnitt 4.4.4 ein, so erhält man für die Brechkraft, bzw. den Brennwert einer dicken Linse:

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{e \cdot (n - 1)}{r_1 \cdot r_2} \right)$$

Für das Rechnen mit einer dicken Linse muss nun der Abstand, g , zum Gegenstand auf die objektseitige Hauptebene bezogen werden, sowie der Abstand, b , zum Bild auf die bildseitige Hauptebene bezogen werden:

$$g = g_1 + \nu_1 e \quad \text{und} \quad b = b_2 + \nu_2 e$$

Mit diesen Werten kann die dicke Linse wie eine dünne Linse gehandhabt werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

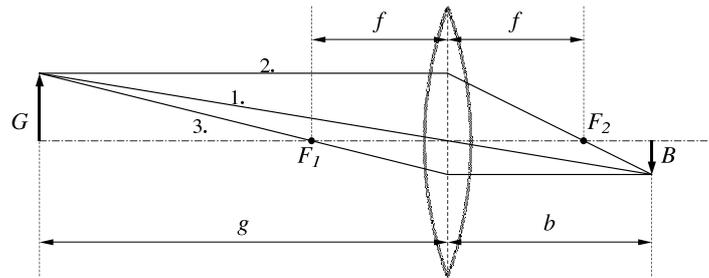


Abbildung 4.19: Abbildung eines Punktes auf einem Objekt auf ein Bild.

4.5 Abbildung

4.5.1 Abbildung an einer Linse

Wir gehen der Frage nach, wie ein Objekt (Gegenstand), G , durch eine Linse auf ein Bild, B , abgebildet wird. Das Objekt befindet sich um die Strecke g vor der Linse, und wir untersuchen einen lichtscheidenden Punkt, der sich um die Strecke G neben der optischen Achse befindet. Der dazugehörige Bildpunkt entsteht an der Stelle, an der sich die vom Objekt ausgesandten Lichtstrahlen, welche die Linse passiert haben, wieder kreuzen. Das Bild habe den Abstand b zu der Linse und die Strahlen kreuzen sich auf der Bildebene mit einem Abstand B zur optischen Achse.

Zur geometrischen Entwicklung der Bildebene verfolgen wir drei Strahlengänge.

1. Der erste Strahlengang ist eine hinreichend lange Gerade vom Objekt durch die Mitte der Linse. Da die Linse in der Mitte planparallel ist, wird der Strahl nicht abgelenkt.
2. Für den zweiten Strahlengang zeichne man eine Gerade parallel zur optischen Achse zwischen Objekt und Linse. Von der Stelle, wo diese Gerade die Linse schneidet, zeichne man eine weitere Linie über den hinteren Brennpunkt, bis sie den ersten Strahlengang schneidet.
3. Der dritte Strahlengang wird vor der Linse mit einer Geraden vom Objekt über den vorderen Brennpunkt bis zur Linse gezeichnet. Danach wird der Strahl parallel zur optischen Achse bis zur Bildebene weitergezeichnet.

Wenn die Linien korrekt gezeichnet wurden, sollten sich alle drei Strahlengänge auf der Bildebene in einem Punkt kreuzen.

Wie bereits in Abschnitt 4.4.5 eingeführt gilt für die Brennweite, f , den Abstand der Linse zum Objekt, g , und den Abstand der Linse zum Bild, b , folgender Zusammenhang:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (4.6)$$

Bei Konvexlinsen hat die Brennweite, f , einen positiven Wert, bei Konkavlinsen einen negativen. Ergibt sich das Bild, wie in der Skizze in Abbildung 4.19, hinter der Linse, so spricht man von einem *reellen* Bild. Der Abstand zum Bild kann aber auch negative Werte annehmen. In diesem Fall spricht man von einem *virtuellen* Bild, da sich die Bildebene vor der Linse, also auf der Seite des Objekts befindet. Wenn z. B. bei einer Konkavlinse die Strahlen hinter der Linse auseinander laufen, so liegt der virtuelle Schnittpunkt der Strahlen vor der Linse. Schließlich, auch der Abstand zum Objekt, g , kann negative Werte annehmen. Das tritt dann auf, wenn mehrere Linsen zu einem System zusammengefügt werden.

Das Bild gibt das Objekt in anderer Größe wieder, was in Abbildung 4.19 durch die Abstände zur optischen Achse dargestellt ist. Es gilt:

$$\frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (4.7)$$

4.5.2 Abbildungsmaßstab und Vergrößerung

Der Abbildungsmaßstab, β , ergibt sich aus dem Verhältnis der Größen von Bild, B , und Objekt, G :

$$\beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (4.8)$$

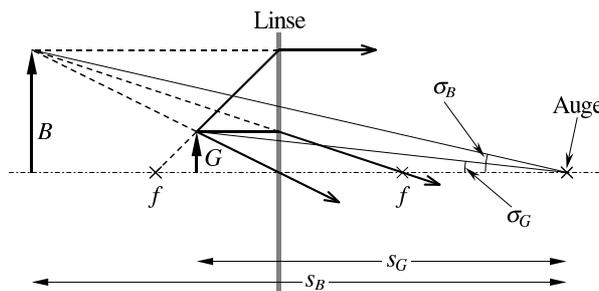


Abbildung 4.20: Die Vergrößerung wird über die subjektive Wahrnehmung bestimmt.

In vielen Fällen ist nur der Betrag von Interesse, so dass das Vorzeichen ignoriert werden kann.

Der Abbildungsmaßstab, β , gibt noch nicht die Vergrößerung eines Linsensystems wieder. Dafür muss der subjektive Eindruck für den Betrachter untersucht werden. Es werden hierfür die Tangens der Winkel, die das Objekt mit und ohne optischem System beim Betrachter abdeckt, verglichen.

Mit σ_B und σ_G als die Winkel, die Bild und Objekt beim Betrachter abdecken, sowie s_B und s_G als die Strecken vom Auge zum Bild, bzw. Objekt ergibt sich die *allgemeine Vergrößerung*, Γ , mit:

$$\Gamma = \frac{\tan \sigma_B}{\tan \sigma_G} = \frac{\frac{B}{s_B}}{\frac{G}{s_G}} = \frac{B \cdot s_G}{s_B \cdot G} \quad (4.9)$$

Soll die *Standardvergrößerung*, Γ_S , einer Lesehilfe für eine bestimmte Anordnung ermittelt werden, so geht man ohne Lesehilfe von einem Abstand von $s_G = s_0 = 25$ cm aus, was dem typischen Leseabstand eines Menschen mit gesunden Augen entspricht.

$$\Gamma_S = \frac{\tan \sigma_B}{\tan \sigma_G} = \frac{\frac{B}{s_B}}{\frac{G}{s_0}} = \frac{B \cdot s_0}{s_B \cdot G} = \frac{B \cdot 25 \text{ cm}}{s_B \cdot G} \quad (4.10)$$

Die *Lupenvergrößerung*, N , ist eine allgemeine Angabe über die Vergrößerungsfähigkeit einer Lupe. Dabei wird zum einen wieder davon ausgegangen, dass der optimale Leseabstand ohne Lesehilfe 25 cm beträgt, zum anderen wird das Objekt in den Brennpunkt der Lupe platziert. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für die Lupenvergrößerung:

$$N = \frac{s_0}{f} = \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad (4.11)$$

Aufgabe 4.13 Berechnen und konstruieren Sie jeweils Lage und Größe des Bildes. Gegeben sind folgende Größen:

1. $G = 2$ cm, $g = 3$ cm, $f = 6$ cm
2. $G = 3$ cm, $g = 18$ cm, $f = 12$ cm
3. $G = 2$ cm, $g = 5$ cm, $f = 6$ cm

Aufgabe 4.14 Eine punktförmige Lichtquelle soll auf einem 4 m entfernten Schirm eine Kreisfläche von 1 m Durchmesser möglichst hell erleuchten. Wo muss eine Linse mit 25 cm Brennweite und 8 cm Durchmesser aufgestellt werden?

Aufgabe 4.15 Sie sind mit Ihrem Auge 8 cm von einer kleinen Schrift entfernt und halten eine Lese Lupe mit der Brennweite 6 cm genau in die Mitte dazwischen. Berechnen Sie die wahre Vergrößerung (Standardvergrößerung) der Lupe.

Aufgabe 4.16 Ein Lese Glas mit 10 cm Brennweite und 45 mm Durchmesser befindet sich 8 cm über einem Schriftstück. Berechnen Sie:

1. den Durchmesser des Gesichtsfeldes auf dem Papier und
2. die wirkliche Vergrößerung (Standardvergrößerung), wenn das Auge 12 cm von der Lupe entfernt ist.

4.5.3 Abbildung an zwei dünnen Linsen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei dünne Linsen mit dem Abstand e zueinander. Für eine gegebene optische Fragestellung an diesen Linsen gibt es zwei Lösungsansätze: Entweder werden die zwei Linsen schrittweise durchgerechnet, oder es werden zunächst die beiden Linsen zusammengefasst, und dann damit die gewünschte Berechnung durchgeführt.

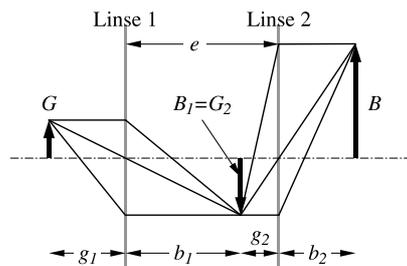


Abbildung 4.21: Bei der schrittweisen Berechnung wird das Bild der ersten Linse zum Gegenstand der zweiten Linse.

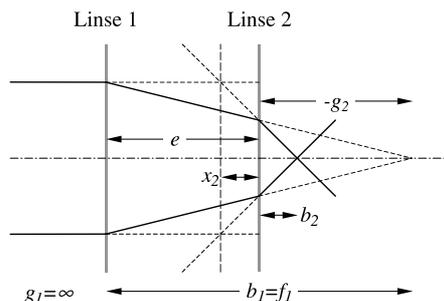


Abbildung 4.22: Strahlengang durch zwei dünne Sammellinsen.

Bei der schrittweisen Berechnung wird ausgehend von einem Objekt $G = G_1$ zunächst das Bild der ersten Linse B_1 bestimmt. Das Bild B_1 dient dann als Gegenstand für die zweite Linse, G_2 , mit dem das endgültige Bild, $B_2 = B$, berechnet werden kann, siehe Abbildung 4.21.

Der Rest dieses Abschnitts beschäftigt sich mit der zweiten Methode, bei der die zwei Linsen zunächst durch eine ersetzt werden. Die beiden Linsen mit Abstand e zueinander haben für sich genommen die Brennweiten f_1 und f_2 . Wie bei der dicken Linse in Abschnitt 4.4.6 versuchen wir die beiden dünnen Linsen durch eine zu ersetzen, und bestimmen Position und Brennweite dieser Linse, siehe Abbildung 4.22.

Die Position ergibt sich aus dem Schnittpunkt des verlängerten eintreffenden Lichtstrahls mit dem verlängerten austretenden Lichtstrahl. Für einen parallel eintreffenden Lichtstrahl gilt:

$$b_1 = f_1 \quad g_2 = e - b_1 = e - f_1 \quad b_2 = \frac{g_2 \cdot f_2}{g_2 - f_2}$$

Wir bezeichnen mit ν_2 den Abstand zwischen dem gesuchten Schnittpunkt und der Linse 2, x_2 , relativ zum Abstand der Linsen zueinander, e . Wir nutzen das Strahlengesetz in der Form, dass der Quotient aus x_2 und e gleich dem Quotienten aus b_2 und $-g_2$ ist. Der Drehpunkt für das Strahlengesetz ist der Schnittpunkt zwischen Lichtstrahl und Linse 2, siehe Abbildung 4.22.

$$\nu_2 = \frac{x_2}{e} = \frac{b_2}{-g_2} = \frac{b_2}{b_1 - e} = \frac{\frac{g_2 \cdot f_2}{g_2 - f_2}}{f_1 - e} = \frac{f_2 \cdot (e - f_1)}{(e - f_1 - f_2) \cdot (f_1 - e)}$$

$$\nu_2 = \frac{f_2}{f_1 + f_2 - e} \quad (4.12)$$

Das Ergebnis gilt für parallel eintreffende Lichtstrahlen. Das Gegenstück zu ν_2 ist ν_1 und bezeichnet den Abstand des Schnittpunkts zu Linse 1, x_1 , relativ zum Abstand zwischen den Linsen, e . Es gilt für parallel austretende Lichtstrahlen:

$$\nu_1 = \frac{f_1}{f_1 + f_2 - e} \quad (4.13)$$

Die Flächen, auf der sich die neue Linse befinden müsste, bezeichnet man wie bei dicken Linsen als *Hauptebenen*. Die *objektseitige Hauptebene* befindet sich $\nu_1 e$ hinter der ersten Linse. Die *bildseitige Hauptebene* befindet sich $\nu_2 e$ vor der zweiten Linse. Die Hauptebenen können sich kreuzen oder sogar

außerhalb des Linsensystems liegen. Die Schnittpunkte dieser Ebenen mit der optischen Achse nennt man *Hauptpunkte*.

Die *Gesamtbrennweite* einer Doppellinse ist der Abstand des hinteren Brennpunktes zur bildseitigen Hauptebene. Es folgt:

$$f = b_2 + x_2 = b_2 + \nu_2 e = b_2 + e \frac{b_2}{b_1 - e} = b_2 \left(1 + \frac{e}{b_1 - e} \right)$$

$$f = \frac{g_2 \cdot f_2}{g_2 - f_2} \cdot \frac{b_1}{b_1 - e} = \frac{(e - f_1) f_2 f_1}{(e - f_1 - f_2) \cdot (f_1 - e)}$$

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - e} \quad (4.14)$$

Die Gesamtbrennweite ist in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung gleich. Die Ähnlichkeit zu den Gleichungen für die Hauptebenen führt zu der einfachen Gleichung:

$$f = \nu_1 f_2 = \nu_2 f_1$$

Wenn der Abstand zum Objekt, g , auf die objektseitige Hauptebene und der Abstand zum Bild, b , auf die bildseitige Hauptebene bezogen wird, so kann das Linsensystem mit diesen Größen wie eine dünne Linse behandelt werden.

$$g = g_1 + \nu_1 e \quad \text{und} \quad b = b_2 + \nu_2 e$$

Es gilt wieder:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad \text{u.s.w.}$$

4.5.4 Abbildung an mehr als zwei Linsen

Wie bei zwei Linsen gilt, bei der Untersuchung eines Linsensystems kann auf zweierlei Art vorgegangen werden. Entweder man rechnet von Linse zu Linse schrittweise durch, oder man fasst zunächst das System zu einer Linse zusammen, und rechnet dann weiter.

Bei der schrittweisen Methode wird zunächst vom Objekt, $G = G_1$, zum Bild, B_1 , der ersten Linse gerechnet. Das berechnete Bild wird dann zum Objekt der zweiten Linse, $B_1 = G_2$, so dass das Bild, B_2 , der zweiten Linse bestimmt werden kann. Das geht dann durch alle Linsen weiter, bis das endgültige Bild des Systems erreicht wird. Alle negativen Abstände und Brennweiten (Konkavlinen) müssen dabei konsequent verfolgt werden. Für ein gegebenes Objekt, G , kann so die Lage und Größe des Bildes, B , bestimmt werden.

Bei der zusammenfassenden Methode werden für das gesamte System die Lage der Hauptebenen und die Brennweite bestimmt. Die *bildseitige Hauptebene* befindet sich am Schnittpunkt der verlängerten parallel eintreffenden Strahlen ($g = \infty$) mit der Verlängerung der austretenden Strahlen. Im Gegenzug, die *objektseitige Hauptebene* befindet sich auf den Schnittpunkten der verlängerten parallel austretenden Strahlen ($b = \infty$) mit den verlängerten eintretenden Strahlen. Die *Gesamtbrennweite* ergibt sich aus dem Abstand des hinteren Brennpunktes (bei parallel eintretenden Strahlen, $g = \infty$) zur bildseitigen Hauptebene. Wenn jetzt der Abstand zum Objekt, g , auf die objektseitige Hauptebene bezogen wird, und der Abstand zum Bild, b , auf die bildseitigen Hauptebene, so können wieder die Regeln für eine einzelne Linse angewendet werden.

Aufgabe 4.17 Eine dünne plankonvexe Linse hat den Krümmungsradius $r_1 = 20$ cm und den Brechungsindex $n_1 = 1,75$. Eine plankonkave Linse mit $n_2 = 1,52$ wird so neben die erste Linse gestellt, dass sich die ebenen Flächen berühren. Das System hat dann die Gesamtbrennweite $f = 60$ cm.

1. Wie groß ist der Radius der Zerstreulinse?
2. Welchen Abstand e müssen die beiden Linsen haben, damit die Brennweite auf 25 cm abnimmt?

Aufgabe 4.18 Zwei gleiche Linsen mit den Brennweiten 8 cm haben den Abstand 5 cm zueinander.

1. Berechnen Sie für parallel einfallende Strahlen die Lage des Brennpunktes durch Anwendung der Linsengesetze auf die Einzellinsen.
2. Konstruieren und berechnen Sie die Lage der Hauptebenen.
3. Berechnen Sie die Gesamtbrennweite nach Formel und vergleichen Sie die Ergebnisse.

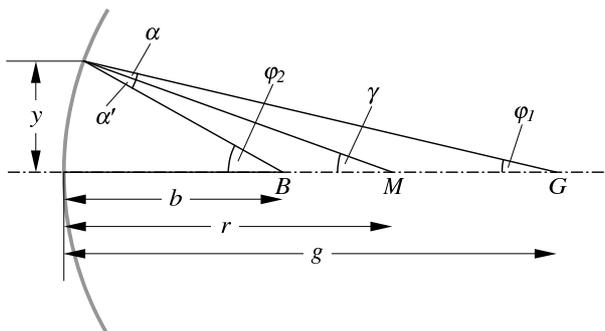


Abbildung 4.23: Abbildung an einem Hohlspiegel.

Aufgabe 4.19 Ein Laserstrahl soll von 2 mm Durchmesser auf 10 mm aufgeweitet werden. Zur Verfügung steht eine Zerstreuungslinse mit $f_1 = -10$ cm.

1. Welche Brennweite f_2 muss die noch erforderliche Sammellinse haben?
2. Wie groß ist der Abstand der beiden Linsen zueinander?

Aufgabe 4.20 Zwei gleiche Linsen mit 10 cm Brennweite haben den Abstand 6 cm zueinander.

1. Berechnen Sie schrittweise die Lage und Größe des Bildes, das dieses Linsensystem von einem 2 cm großen Gegenstand erzeugt, der 15 cm vor der ersten Linse steht.
2. Berechnen Sie die Lage der Hauptebenen.
3. Berechnen Sie die Lage und Größe des Bildes mit Hilfe der Hauptebenen und vergleichen Sie die Lösung mit 1.

Aufgabe 4.21 Zwei gleiche Linsen mit je 6 cm Brennweite haben den Abstand 10 cm zueinander.

1. Berechnen Sie schrittweise die Lage und Größe des Bildes, das dieses Linsensystem von einem 2 cm großen Gegenstand erzeugt, der 10 cm vor der ersten Linse steht.
2. Berechnen Sie die Lage der Hauptebenen.
3. Berechnen Sie die Lage und Größe des Bildes mit Hilfe der Hauptebenen und vergleichen Sie die Lösung mit 1.

Aufgabe 4.22 Von einem Gegenstand der Größe y_0 in der Position x_0 auf der optischen Achse falle ein Strahl in der Höhe y_1 auf eine dünne Sammel- oder Zerstreuungslinse, die sich in der Position x_1 befindet und eine Brennweite von f_1 (für Zerstreuungslinse negative Werte) besitzt.

1. Konstruieren und
2. berechnen Sie die Geradengleichung des austretenden Strahls.
3. Verallgemeinern Sie das Ergebnis für weitere Linsen.

4.5.5 Abbildung an Hohl- und Wölbungsspiegeln

Ein Hohlspiegel stellt typischerweise einen Teil einer Kugeloberfläche mit Radius r und Mittelpunkt M dar. Aus Abbildung 4.23 lassen sich mittels Kleinwinkelapproximation folgende Zusammenhänge ableiten:

$$\varphi_1 = \frac{y}{g} \quad \gamma = \frac{y}{r} \quad \varphi_2 = \frac{y}{b}$$

Des Weiteren gilt:

$$\alpha = \gamma - \varphi_1 \quad \alpha' = \varphi_2 - \gamma \quad \alpha' = \alpha \quad (\text{gesetzmäßige Reflexion})$$

Fügt man diese Gleichungen zusammen, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (4.15)$$

Die vordere und hintere Brennweite ergibt sich, wenn entsprechend der Abstand zum Bild, b , bzw. der Abstand zum Gegenstand, g , auf unendlich gesetzt wird. Es folgt:

$$F = f = \frac{r}{2} \quad (4.16)$$

Daraus ergibt sich die gleiche Grundgleichung wie für dünne Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

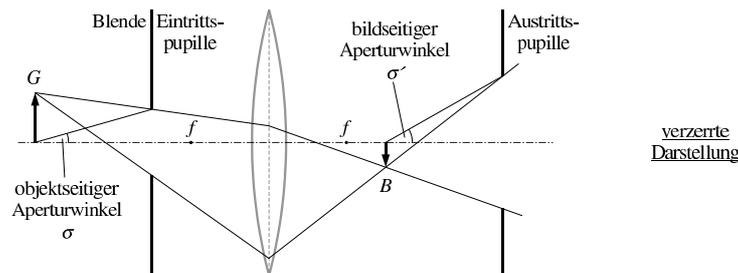


Abbildung 4.24: Blende in einem optischen System mit Eintritts- und Austrittspupille.

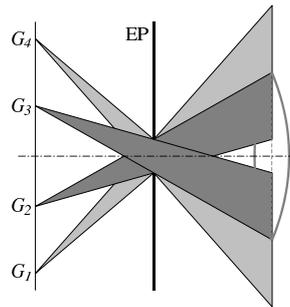


Abbildung 4.25: Nur der Bereich G2 bis G3 wird ohne zusätzliche Verluste abgebildet.

In Abbildung 4.23 haben wir einen Hohlspiegel betrachtet. Bei einem Wölbungsspiegel muss für Radius und Brennweite mit negativen Werten gerechnet werden. Entstehen für den Abstand zum Gegenstand, g , oder zum Bild, b , negative Werte, so befinden sich diese virtuell hinter dem Spiegel.

Für den Zusammenhang der Größen von Gegenstand, G , und Bild, B , sowie dem Abbildungsmaßstab, β , verhält sich ein Hohl-, bzw. Wölbungsspiegel genauso wie eine dünne Linse:

$$\beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$$

4.6 Blenden

In jedem optischen System begrenzen Blenden den Querschnitt der genutzten Strahlen. Die Begrenzung ergibt sich aus der Größe der Linsen, durch mechanische Begrenzungen des Systems, oder durch eine bewusst eingefügte einstellbare Blende. In allen Fällen spricht man von einer Blende.

Neben der Größe der Blende hat die Position der Blende einen wesentlichen Einfluss auf die Abbildungseigenschaft des Systems. Wird die Blende auf die Objekt- oder Bildposition platziert, so ergibt sich eine scharfe Begrenzung des Bildes (z. B. beim Diaprojektor). Wird die Blende entlang der optischen Achse verschoben, so werden die Kanten zunehmend unschärfer, bis die Blende schließlich nur zu einer Verdunkelung führt (z. B. beim Objektiv eines Fotoapparats).

In Abbildung 4.24 stellt eine Blende die *Eintrittspupille*, EP , dar. Die Linse erzeugt von der Eintrittspupille ein Bild, die *Austrittspupille*, AP . Alle Strahlen, die durch die Eintrittspupille auf die Linse dringen, gelangen zwangsläufig auch durch die Austrittspupille.

Bei kleinen Blenden (schlanke Strahlenbündel) haben Linsenfehler nur einen geringen Einfluss. Damit erhöhen kleine Blenden die Abbildungsqualität eines Linsensystems, siehe auch Abschnitt 4.8. Andererseits reduziert eine kleine Blende die Lichtmenge, die vom Objekt zum Bild gelangt, und das Bild wird dunkler.

Wird eine Blende zwischen einem Objekt und einer Linse platziert, so wird die Lichtmenge für die Abbildung begrenzt. In Abbildung 4.25 erreichen alle Lichtstrahlen aus dem Bereich G_2 bis G_3 , welche die Blende passiert haben, auch die dahinter befindliche Linse. Lichtstrahlen von Punkten im Bereich G_1 bis G_2 und G_3 bis G_4 können die Linse nur teilweise erreichen und werden daher dunkler dargestellt. Punkte außerhalb des Bereichs G_1 bis G_4 werden nicht abgebildet.

Eine so platzierte Blende begrenzt das Gesichtsfeld. Das entstehende Bild hat eine unscharfe Begrenzung, es wird zum Rand hin dunkler. Man spricht von *Abschattung* oder *Vignettierung*.

Bei einem optischen System wird der Lichtstrom gezielt durch einstellbare Blenden beeinflusst. Bei dem Objektiv eines Fotoapparates ist eine einstellbare Blende so platziert, dass sie nur den Lichtstrom, nicht aber das Bild beeinflusst (keine Vignettierung).

Ein geeignetes Maß für die Einstellung der Blende in einem Fotoapparat ist die relative Öffnung. Sie gibt den Durchmesser der Blende, D_{EP} , geteilt durch die Brennweite, f , wieder. Beispiel: 16 mm Blendendurchmesser geteilt durch 45 mm Brennweite entspricht einer relativen Öffnung von $1 : 2,8$.

Die Helligkeit auf dem Film ist neben der Helligkeit des Objektes von zwei weiteren Größen abhängig: Zum einen ist sie proportional zum Querschnitt der Blende, also zum Quadrat des Durchmessers der Blende. Wenn der Durchmesser z. B. verdoppelt wird, so vervierfacht sich die Helligkeit auf dem Film. Zum anderen ist die Helligkeit auf dem Film abhängig von dem Abstand der Blende zum Film. In erster Näherung nimmt die Helligkeit mit dem Quadrat des Abstands ab. Ausgehend von weit entfernten Objekten ist der Abstand zwischen Film und Linse in etwa gleich der Brennweite des Objektivs ($b \approx f$).

Die Blendenzahl k berücksichtigt diese beiden Einflüsse auf die Filmhelligkeit. Sie bildet sich aus dem Quotienten von Brennweite und Durchmesser der Eintrittspupille.

$$k = \frac{f}{D_{EP}} \quad (4.17)$$

Je kleiner die Blendenzahl, k , desto lichtstärker ist ein Objektiv.

Bei Kameraobjektiven sind die Blendenzahlen so abgestuft, dass sich die Lichtmenge in Zweierpotenzen ändert. Das bedeutet für die Blendenzahl eine Änderung mit Faktoren der Wurzel aus zwei:

$$1 - 1,4 - 2 - 2,8 - 4 - 5,6 - 8 - 11 - 16 - 22$$

Bei der Beurteilung eines Kameraobjektivs ist die niedrigste einstellbare Blendenzahl von Interesse. Sie zeigt an, wie lichtstark das Objektiv ist. Das ist vor allem für Aufnahmen bei schlechten Lichtbedingungen und bei unempfindlichen (hochauflösenden) Filmen von Bedeutung.

Aufgabe 4.23 In 30 cm Abstand vor einer Sammellinse steht eine Blende (EP) mit 12 mm Durchmesser. Ihr Bild (AP) entsteht 60 cm hinter der Linse.

1. Berechnen Sie den Durchmesser der Austrittspupille.
2. Berechnen Sie für einen 10 mm großen Gegenstand (symmetrisch zur optischen Achse) mit der Gegenstandsweite 50 cm die Bildgröße und Bildweite.
3. Konstruieren Sie diese Abbildung mit Hilfe der Pupillenstellungen.
4. Berechnen Sie, wie groß der Linsendurchmesser mindestens sein muss, damit auch die Randpartien des Gegenstandes ohne Abschattung abgebildet werden.

4.7 Schärfentiefe

Bei einer Kamera befindet sich der Film auf einer Ebene, so dass nur Objekte, die sich ebenfalls auf einer Ebene befinden, ohne Fehler abgebildet werden können. (Das gilt auch für ideale Linsen.) Objektpunkte mit größerem oder kleinerem Abstand zur Linse erzeugen auf dem Film Unschärfenkreise. Aufgrund des begrenzten Auflösungsvermögens unseres Auges oder des Filmmaterials ist eine begrenzte Unschärfe *tolerabel*. Der physiologische Grenzwinkel, den unser Auge noch wahrnehmen kann, liegt bei etwa einer Winkelminute ($0,017^\circ$). Bei Filmmaterialien kann als erste Näherung ein Tausendstel der Bilddiagonalen verwendet werden. (Betrachtet man ein solches Bild mit dem Abstand der Bilddiagonalen, so entspricht die tolerierte Unschärfe einem Winkel von 3,4 Minuten.)

Befindet sich ein Lichtpunkt etwas näher oder weiter entfernt vom Objektiv als die optimale Position, g , so entsteht auf dem Film ein *Unschärfenkreis*. Bei einem definierten maximalen Unschärfekreis u' lässt sich die vordere und hintere Grenzfernung, g_v und g_h , berechnen.

Zur Berechnung bilden wir den maximalen Unschärfekreis u' auf die optimale Objektebene mit Abstand g zur Linse ab, siehe Abbildung 4.26. Danach ermitteln wir mittels Strahlengesetz den Abstand der Schnittpunkte mit der optischen Achse zur Linse, g_v und g_h . Wir verwenden die Blendenzahl k .

Als Rechnung soll hier nur die vordere Grenzfernung hergeleitet werden:

$$k = \frac{f}{D_{EP}} \quad \Rightarrow \quad D_{EP} = \frac{f}{k}$$

Als nächstes wird der Betrag der auf die Objektebene abgebildeten tolerierten Unschärfe, u , bestimmt.

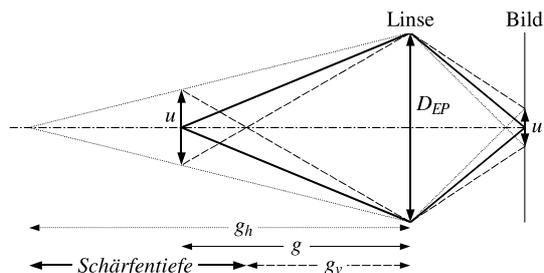


Abbildung 4.26: Vordere und hintere Grenzfernung bei einer tolerierten Unschärfe.

$$\frac{u'}{u} = |\beta| = \frac{b}{g} = \frac{\frac{gf}{g-f}}{g} = \frac{f}{g-f} \quad \Rightarrow \quad u = u' \frac{g-f}{f}$$

Zur Bestimmung der vorderen Grenzfernung wenden wir das Strahlengesetz an:

$$\begin{aligned} \frac{D_{EP}}{u} &= \frac{g_v}{g-g_v} \\ g_v &= \frac{gD_{EP}}{D_{EP}+u} = \frac{gf}{k\left(\frac{f}{k} + u'\frac{g-f}{f}\right)} \\ g_v &= \frac{gf^2}{f^2 + u'k(g-f)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die hintere Grenzfernung ergibt sich:

$$g_h = \frac{gf^2}{f^2 - u'k(g-f)} \quad (4.19)$$

Mit $g \gg f$ kann wie folgt genähert werden:

$$\frac{1}{g_{v,h}} \approx \frac{1}{g} \pm \frac{u'k}{f^2} \quad (4.20)$$

Die Schärfentiefe ergibt sich aus der Differenz der Grenzfernungen:

$$\Delta g = g_h - g_v \quad (4.21)$$

Aufgabe 4.24 Leiten Sie die Formel für die hintere Grenzfernung her.

Aufgabe 4.25 Mit einer Kleinbildkamera (24 mm * 36 mm) mit einer Brennweite von 45 mm soll bei Blende 2,8 ein 3 m entferntes Objekt fotografiert werden. Berechnen Sie die Grenzfernungen und die Schärfentiefe.

Aufgabe 4.26 Mit der Kamera der vorherigen Aufgabe soll bei Blende 8 fotografiert werden. Welche Entfernung ist einzustellen, wenn die hintere Grenzfernung unendlich sein soll? Wie groß ist dann die vordere Grenzfernung?

Aufgabe 4.27 Ein Film habe eine Körnung von $10\mu\text{m}$ und ist eine Kamera eingelegt, dessen Objektiv eine Brennweite von 50 mm hat und bei der eine Blendenzahl von 5,6 eingestellt wurde. Wie nah darf bei maximaler Schärfe ein Objekt an der Linse sein, wenn die hintere Grenzfernung auf unendlich eingestellt wurde?

4.8 Linsenfehler

Bei der Verwendung von Linsensystemen ergeben sich Abbildungsfehler, die auf eingeführte Näherungen, Herstellungsfehler oder physikalische Phänomene zurückzuführen sind. Die folgenden Betrachtungen gehen auf diese *Abberationen* ein, und schlagen z. T. Kompensationen vor.

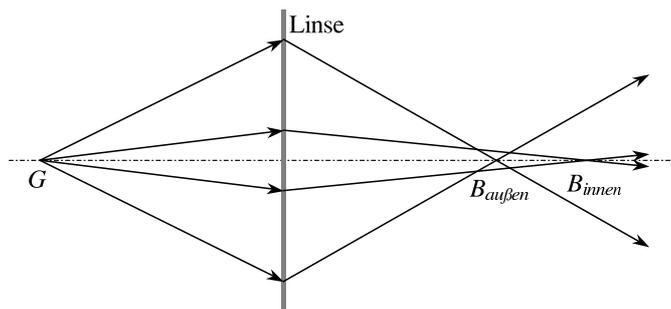


Abbildung 4.27: Die äußeren Bereiche der Linse erzeugen eine kürzere Brennweite.

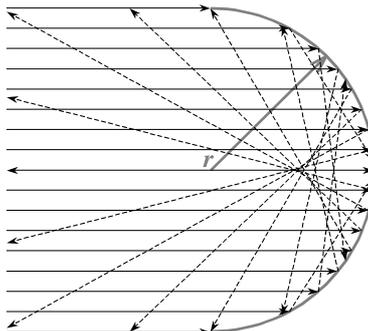


Abbildung 4.28: Sphärische Abberation veranschaulicht an einem Hohlspiegel.

4.8.1 Sphärische Aberration

Wird eine Linse durch eine kugelförmige Oberfläche genähert (sphärische Linse), so liefert sie nur für enge Strahlenbündel die gewünschten Eigenschaften. Für Strahlen, die näher am Rand die Linse durchdringen, ergibt sich eine betragsmäßig verkürzte Brennweite.

Dieses Verhalten lässt sich durch ein Einlinsensystem veranschaulichen, bei dem nacheinander der mittlere und der äußere Bereich der Linse abgedeckt wird. Soll zum Beispiel die Flamme einer Kerze auf einem Schirm dargestellt werden, so muss bei den beiden Blenden jeweils eine andere Position für die Bildebene gewählt werden.

Grafisch lässt sich dieses Verhalten an einem sphärischen Hohlspiegel veranschaulichen. Für Lichtstrahlen nahe der optischen Achse stellt sich bei parallel eintreffenden Lichtstrahlen der Brennfleck wie erwartet bei $r/2$ ein (siehe auch Abschnitt 4.23). Für Strahlen, die näher am Rand des Hohlspiegels reflektiert werden, ergibt sich wie bei sphärischen Linsen eine betragsmäßig kleinere Brennweite. Die Menge aller reflektierten Strahlen ergeben die Tangenten (des oberen Teils) einer herzförmigen Linie. Dieses Phänomen lässt sich an einer von schräg oben beleuchteten Kaffeetasse beobachten. Auf dem Tassenboden entsteht die herzförmige Linie.

In optischen Instrumenten wird zwischen *sphärischen* und *asphärischen* Linsen unterschieden. Letztere haben eine etwas kompliziertere Oberflächenform und zeigen zumindest für eine Anordnung keine sphärische Abberation.

4.8.2 Astigmatismus

Wir stellen uns anstelle einer sphärischen Linse eine mit zylinderförmiger Oberfläche vor. Eine solche Linse bündelt einen Lichtstrahl nur entlang einer Achse. Statt eines Brennpunkts entsteht eine Brennlinie parallel zur Zylinderachse der Linse.

Eine zylinderförmige Linse stellt den Extremfall einer nichtperfekt gefertigten Linse dar, die nicht in alle Richtungen gleichmäßig gewölbt ist. Eine nichtoptimal gefertigte Linse hat eine Ebene maximaler und eine Ebene minimaler Krümmung, die jede eine Brennlinie unterschiedlicher Brennweite erzeugt. Diesen Effekt bezeichnet man als *Astigmatismus*.

Auch bei exakt gefertigten sphärischen Linsen entsteht Astigmatismus bei Objektpunkten, die weit neben der optischen Achse liegen. Es entstehen zwei senkrecht zueinander stehende Brennlinien unterschiedlicher Brennweite. Sie stehen senkrecht, bzw. parallel zu der Richtung, in die der Objektpunkt von

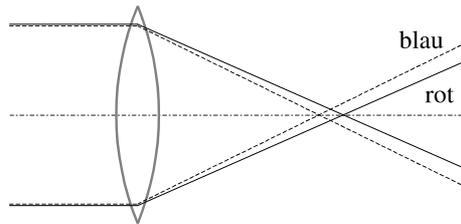


Abbildung 4.29: Chromatische Abberation.

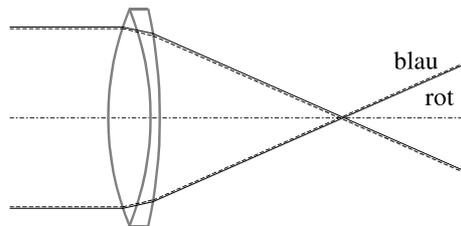


Abbildung 4.30: Kompensation chromatischer Abberation durch Zusammenfügung zweier Linsen aus Gläsern unterschiedlicher Dispersion.

der optischen Achse verschoben ist.

4.8.3 Chromatische Abberation

Im Abschnitt 4.3.4 sind wir bereits auf die Dispersion von Gläsern eingegangen. Bei einer Linse führt die positive Dispersion für blaue Lichtstrahlen zu einer (betragsmäßig) geringeren Brennweite. Eine einfache Linse kann daher von einem weißen Objekt nur eine Farbe scharf darstellen, siehe Abbildung 4.29.

Durch geeignete Kombination von Linsen kann die chromatische Abberation zu einem guten Teil kompensiert werden. Lässt man zum Beispiel einer Sammellinse eine Zerstreuungslinse mit geringerer Brechkraft aus einem Glas mit höherer Dispersion folgen, so kann zumindest für zwei Farben die chromatische Abberation aufgehoben werden. Durch kompliziertere Linsensysteme können auch weitere Farben abgeglichen werden. Solche Linsensysteme werden *Achromate* genannt.

Aufgabe 4.28 Eine dünne plankonvexe Linse habe eine Brennweite von 100 mm und einen Brechungsindex von 1,7. Bestimmen sie die Radien der Linse.