

# **Physik 1**

**Vorlesung an der HAW-Hamburg,  
Department Informations- und Elektrotechnik**

Prof. Dr. Robert Heß

31. Oktober 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Messen, Maßsysteme und Vektoren</b>	<b>5</b>
1.1. Messen in der Physik . . . . .	5
1.1.1. Systeme von Einheiten . . . . .	5
1.1.2. Basiseinheiten im SI-System . . . . .	5
1.1.3. Abgeleitete Einheiten im SI-System . . . . .	6
1.1.4. Rechnen mit Einheiten . . . . .	6
1.1.5. Messfehler . . . . .	6
1.1.6. Fehlerfortpflanzung . . . . .	7
1.2. Vektoren zur Beschreibung von gerichteten Größen . . . . .	8
1.2.1. Skalare und Vektoren . . . . .	8
1.2.2. Kartesische Koordinaten . . . . .	8
1.2.3. Polare und Kartesische Koordinaten . . . . .	9
1.2.4. Dreidimensionale Koordinaten . . . . .	9
1.2.5. Einheitsvektoren . . . . .	10
1.2.6. Addition von Vektoren . . . . .	10
1.2.7. Subtraktion von Vektoren . . . . .	10
1.2.8. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	10
1.2.9. Skalarprodukt . . . . .	10
1.2.10. Vektorprodukt . . . . .	11
1.3. Aufgaben . . . . .	11
<b>2. Bewegung auf einer Geraden</b>	<b>13</b>
2.1. Position, Bahn, Strecke . . . . .	13
2.1.1. Position . . . . .	13
2.1.2. Bahn und Strecke . . . . .	13
2.2. Geschwindigkeit . . . . .	13
2.2.1. Mittlere Geschwindigkeit . . . . .	13
2.2.2. Momentane Geschwindigkeit . . . . .	14
2.2.3. Konstante Geschwindigkeit . . . . .	14
2.3. Beschleunigung . . . . .	14
2.3.1. Mittlere Beschleunigung . . . . .	14
2.3.2. Momentane Beschleunigung . . . . .	14
2.3.3. Konstante Beschleunigung . . . . .	15
2.4. Darstellung im v(t)-Diagramm . . . . .	15
2.5. Aufgaben . . . . .	16
<b>3. Bewegung im Raum</b>	<b>18</b>
3.1. Position als Vektor . . . . .	18
3.2. Geschwindigkeit als Vektor . . . . .	18
3.3. Position und Geschwindigkeit . . . . .	18
3.4. Beschleunigung als Vektor . . . . .	19
3.5. Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	20
3.5.1. Beschleunigung entlang der Bewegung . . . . .	20
3.5.2. Beschleunigung quer zur Bewegung . . . . .	20
3.5.3. Beschleunigung in beliebiger Richtung . . . . .	21
3.6. Aufgaben . . . . .	21
<b>4. Newtonsche Axiome</b>	<b>24</b>
4.1. Masse und Kraft . . . . .	24
4.1.1. Masse . . . . .	24
4.1.2. Kraft . . . . .	24
4.2. Erstes Axiom: Trägheitsprinzip . . . . .	24
4.3. Zweites Axiom: Aktionsprinzip . . . . .	25
4.3.1. Beschleunigungskraft parallel zur Bewegung . . . . .	26

4.3.2. Beschleunigungskraft quer zur Bewegung . . . . .	27
4.4. Drittes Axiom: Reaktionsprinzip . . . . .	27
4.4.1. Bewegung auf einer Geraden . . . . .	27
4.4.2. Bewegung auf einer Kreisbahn . . . . .	28
4.5. Superposition der Kräfte . . . . .	28
4.6. Reibung . . . . .	28
4.6.1. Reibungskoeffizienten . . . . .	30
4.6.2. Bestimmung der Koeffizienten . . . . .	30
4.7. Aufgaben . . . . .	30
<b>5. Arbeit, Energie und Leistung</b>	<b>32</b>
5.1. Arbeit $W$ . . . . .	32
5.1.1. Winkel zwischen Kraft und Bewegung . . . . .	32
5.1.2. Änderung der Kraft entlang der Strecke . . . . .	32
5.2. Energie $E$ . . . . .	33
5.2.1. Kinetische Energie . . . . .	33
5.2.2. Potentielle Energie . . . . .	34
5.3. Energieerhaltungssatz . . . . .	34
5.4. Leistung $P$ . . . . .	34
5.5. Aufgaben . . . . .	37
<b>6. Impuls und Stoß</b>	<b>38</b>
6.1. Impuls $p$ . . . . .	38
6.2. Stoß . . . . .	38
6.3. Impulserhaltungssatz . . . . .	39
6.3.1. Elastischer Stoß . . . . .	39
6.3.2. Unelastischer Stoß . . . . .	40
6.4. Bezugssysteme . . . . .	41
6.4.1. Elastischer Stoß im Schwerpunktssystem . . . . .	41
6.4.2. Unelastischer Stoß im Schwerpunktssystem . . . . .	42
6.5. Drehmoment, Drehimpuls und Trägheitsmoment . . . . .	43
6.5.1. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung . . . . .	43
6.5.2. Drehmoment $M$ . . . . .	43
6.5.3. Trägheitsmoment $J$ . . . . .	44
6.5.4. Rotationsenergie $E_{\text{rot}}$ . . . . .	45
6.5.5. Drehimpuls $L$ . . . . .	45
6.6. Drehimpulserhaltungssatz . . . . .	45
6.7. Aufgaben . . . . .	46
<b>7. Schwingungen</b>	<b>48</b>
7.1. Definition von Schwingungen . . . . .	48
7.2. Prinzipielle Arbeitsweise von Schwingungen . . . . .	48
7.3. Ungedämpfte harmonische Schwingung . . . . .	48
7.3.1. Herleitung ungedämpfter harmonischer Schwingungen . . . . .	48
7.3.2. Dynamische Verläufe einer harmonischen Schwingung . . . . .	49
7.3.3. Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen . . . . .	49
7.4. Gedämpfte, harmonische Schwingungen . . . . .	50
7.4.1. Herleitung der gedämpften harmonischen Schwingung . . . . .	50
7.4.2. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	52
7.4.3. Kenngrößen gedämpfter Schwingungen . . . . .	52
7.5. Erzwungene Schwingung . . . . .	53
7.5.1. Herleitung der erzwungenen Schwingung . . . . .	53
7.5.2. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	53
7.6. Überlagerung von Schwingungen . . . . .	54
7.7. Lissajous-Figuren . . . . .	55
7.8. Aufgaben . . . . .	55
<b>8. Starre Körper</b>	<b>57</b>
8.1. Translation und Rotation . . . . .	57
8.2. Kraft und Drehmoment . . . . .	57
8.2.1. Linienflüchtigkeit . . . . .	57

8.2.2. Hilfskräfte . . . . .	58
8.2.3. Auswirkung auf Translation und Rotation . . . . .	58
8.3. Schwerpunkt . . . . .	59
8.4. Masse und Trägheitsmoment . . . . .	60
8.4.1. Allgemeine Gleichungen . . . . .	60
8.4.2. Beispiele für Trägheitsmomente . . . . .	61
8.4.3. Verschiebung der Drehachse . . . . .	61
8.5. Impuls und Drehimpuls . . . . .	61
8.5.1. Impuls eines starren Körpers . . . . .	61
8.5.2. Drehimpuls eines starren Körpers . . . . .	61
8.6. Energie und Leistung . . . . .	62
8.6.1. Translation . . . . .	62
8.6.2. Rotation . . . . .	64
8.6.3. Kombination von Translation und Rotation . . . . .	65
8.7. Aufgaben . . . . .	65
<b>A. Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>67</b>
A.1. Messen, Maßsysteme und Vektoren . . . . .	67
A.2. Bewegung auf einer Geraden . . . . .	68
A.3. Bewegung im Raum . . . . .	68
A.4. Newtonsche Axiome . . . . .	70
A.5. Arbeit, Energie und Leistung . . . . .	71
A.6. Impuls und Stoß . . . . .	72
A.7. Schwingungen . . . . .	73
A.8. Starre Körper . . . . .	75

# 1. Messen, Maßsysteme und Vektoren

## 1.1. Messen in der Physik

Die Physik beobachtet die Natur und versucht Gesetzmäßigkeiten daraus abzuleiten. In diesem Vorgang spielt das Messen von physikalischen Größen eine zentrale Rolle.

Soll z.B. der freie Fall eines Steins untersucht werden, so muss der zeitliche Verlauf der Position des Steins gemessen und analysiert werden. Liegen einige Messpunkte vor, so kann daraus ein physikalisches Gesetz abgeleitet werden.

Allgemein wird beim Messen mit einer anderen Größe, der *Einheit*, verglichen. Wenn ein Gegenstand 1,75 Meter lang ist, so wird dieser mit der Einheit *Meter* verglichen. Es wird festgestellt, dass dieser 1,75 mal so lang wie ein Meter ist.

Ausnahme von der vergleichenden Messung ist das Zählen von diskreten Ereignissen oder Gegenständen.

### 1.1.1. Systeme von Einheiten

Es stellt sich die Frage, mit *welchen* Einheiten verglichen wird. So kann z.B. eine Länge mit dem typischen Durchmesser eines Atoms (Ångström), einer typischen Daumenbreite (das Inch), der Länge des Fußes oder Armes eines Monarchen (das englische Fuß und Yard), dem 10.000.000sten Teil des Erdquadranten (das Meter) oder der Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt verglichen werden.

Je nach Wissenschaftsgebiet und Region gibt es unterschiedliche Vorlieben für Systeme von Einheiten. So wird in der Astronomie mit Lichtjahren gerechnet und in der Kristallografie das Ångström bevorzugt. Innerhalb eines Systems von Einheiten können Messgrößen ohne Probleme verglichen werden. Schwierigkeiten treten auf, wenn zwischen Systemen von Einheiten gewechselt werden muss. Angefangen von ähnlich aussehenden Schrauben, die aufgrund unterschiedlicher Einheiten doch nicht kompatibel sind, bis hin zu internationalen Projekten, bei denen Zahlen aus Zeichnungen unachtsam übernommen werden. (Prominentes Beispiel ist der *Mars Climate Orbiter*, der durch das Verwenden verschiedener Einheitensysteme im September 1999 in der Mars-Atmosphäre zerstört wurde.)

Um dem Abhilfe zu schaffen wurde ein internationales System von Einheiten definiert, das *SI-Maßsystem*. Es sieht einen Satz von sieben Basiseinheiten vor (Abschnitt 1.1.2), von denen weitere Einheiten abgeleitet werden (Abschnitt 1.1.3). Damit ein großer Wertebereich für eine Messgröße abgedeckt werden kann, sind eine Reihe von Faktoren vorgesehen, die in Tabelle 1.1 aufgelistet sind. (Vorsicht ist bei den Vorfaktoren in der EDV geboten, bei denen mit Potenzen von  $2^{10} = 1024$  gearbeitet wird.)

### 1.1.2. Basiseinheiten im SI-System

Das SI-System sieht sieben Basiseinheiten vor, siehe Tabelle 1.2.

Die *Länge* wird in Metern, Einheitenzeichen *m* gemessen. Ursprünglich war das Meter durch den 10-millionsten Teil des Erdquadranten definiert. Das ist die Strecke vom Nord- oder Südpol bis zum Äquator geteilt durch 10 Millionen. Ende des 18. Jahrhunderts vermessen galt das daraus erstellte *Urmeter* für gut  $2\frac{1}{2}$  Jahrhunderte als Referenz für das Meter. Heute wird das Meter indirekt über Lichtgeschwindigkeit und Zeit definiert. Ein Meter ist die Strecke, die ein Lichtstrahl im Vakuum in  $1/299.792.458$  Sekunden zurücklegt.

Die *Zeit* wird in Sekunden, Einheitenzeichen *s* gemessen. Während ursprünglich die Sekunde über den Bruchteil eines Tages bestimmt wurde, wird heute die frequenzabhängige Absorption des Isotops  $^{133}\text{Cs}$  verwendet. Die Frequenz eines Senders wird mithilfe dieses Isotops auf  $10^{-13}$  genau geregelt, wobei eine Sekunde mit 9.192.631.770 Perioden dieser Schwingungen definiert ist. Die heutigen *Atomuhren* basieren auf diesem Prinzip.

Die *Masse* wird in Kilogramm, Einheitenzeichen *kg* gemessen. Die Einheit hebt sich von den anderen SI-Basiseinheiten dadurch ab, dass der SI-Vorsatz Kilo elementarer Bestandteil der Einheit ist. Soll ein anderer Vorfaktor verwendet werden, so wird dieser relativ zum Gramm angegeben. Beispiel: Eine Tonne entspricht einem *Mega-Gramm*, und nicht einem *Kilo-Kilogramm* ( $1\text{ t}=1\text{ Mg}$ ). Die Masse ist die einzige unter den SI-Basiseinheiten, die noch von einem Prototyp abgeleitet wird. Der Prototyp ist ein Zylinder aus einer Platin-Iridium Legierung, der in einem Safe in Paris aufbewahrt wird. Es wird derzeit intensiv daran gearbeitet, das Kilogramm von einer physikalisch elementaren Größe abzuleiten. Ziel ist es, eine Genauigkeit von etwa  $10^{-8}$  zu erreichen!

Die *Temperatur* wird in Kelvin, Einheitenzeichen *K*, gemessen. Sie beginnt beim absoluten Nullpunkt und hat beim Tripelpunkt reinen Wassers den Wert 273,16 K. Dieser merkwürdig anmutende Wert wurde so gewählt, damit Temperaturdifferenzen in Kelvin und Celsius den gleichen Betrag ergeben.

Der *elektrische Strom* wird in Ampere, Einheitenzeichen *A*, gemessen. Es ist die Menge an Strom, die für zwei unendlich dünne Leiter im Abstand von 1 m benötigt wird, so dass zwischen den Leitern eine Kraft von 200 nN pro Meter Drahtlänge entsteht.

*Lichtstärke* wird in Candela, Einheitenzeichen *cd*, gemessen. Das Candela beschreibt den Lichtstrom pro Raumwinkel und berücksichtigt die Physiologie des menschlichen Auges. Licht mit einer Frequenz von 540 THz und mit einer Leistung von 1/683 Watt pro Raumwinkel definiert 1 cd. Eine normale Haushaltsker-

Vorsilbe	Abkürzung	Faktor	=	
Exa-	E	$10^{18}$	=	1 000 000 000 000 000 000
Peta-	P	$10^{15}$	=	1 000 000 000 000 000
Tera-	T	$10^{12}$	=	1 000 000 000 000
Giga-	G	$10^9$	=	1 000 000 000
Mega-	M	$10^6$	=	1 000 000
Kilo-	k	$10^3$	=	1 000
Hekto-	h	$10^2$	=	100
Deka-	da	$10^1$	=	10
-	-	$10^0$	=	1
Dezi-	d	$10^{-1}$	=	0,1
Zenti-	c	$10^{-2}$	=	0,01
Milli-	m	$10^{-3}$	=	0,001
Mikro-	$\mu$	$10^{-6}$	=	0,000 001
Nano-	n	$10^{-9}$	=	0,000 000 001
Piko-	p	$10^{-12}$	=	0,000 000 000 001
Femto-	f	$10^{-15}$	=	0,000 000 000 000 001
Atto-	a	$10^{-18}$	=	0,000 000 000 000 000 001

Tabelle 1.1.: Vielfache von Einheiten

Größe	Einheit	Zeichen
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Temperatur	Kelvin	K
elektrischer Strom	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	cd
Substanzmenge	Mol	mol

Tabelle 1.2.: Die SI-Basiseinheiten

ze hat eine Lichtstärke von etwa 1 cd.

Die *Substanzmenge* wird in Mol mit Einheitenzeichen *mol* gemessen. Es ist die Stoffmenge eines Materials, das aus genauso vielen Einzelteilchen wie 12g des Isotops  $^{12}\text{C}$  besteht. Die Anzahl der Einzelteilchen eines Mols ist durch die Avogadro-Konstante  $N_A = 6,02214179(30) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  gegeben. (Die Zahl in den Klammern gibt die Unsicherheit der letzten Ziffern an.)

### 1.1.3. Abgeleitete Einheiten im SI-System

Die sieben Basiseinheiten können zu weiteren Einheiten kombiniert werden. So wird die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde angegeben:  $[v] = \text{m s}^{-1} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , oder die Kraft in Newton:  $[F] = \text{kg m s}^{-2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ .

Allgemein ergibt sich die abgeleitete Einheit einer Größe  $Q$  durch einen Faktor  $a$  und die sieben Baiseinheiten mit unterschiedlichen Exponenten  $\{n_1 \dots n_7\}$ :

$$[Q] = a \text{ m}^{n_1} \text{s}^{n_2} \text{kg}^{n_3} \text{K}^{n_4} \text{A}^{n_5} \text{cd}^{n_6} \text{mol}^{n_7}$$

Hat der Faktor  $a$  den Wert 1, so sprechen wir von *kohärenzen* SI-Einheiten. So ist z.B. ein Kubikmeter eine kohärente SI-Einheit, das Liter dagegen nicht.

Eine Einheit kann mit einem Faktor aus Tabelle 1.1 versehen werden, um angemessene Zahlenwerte zu erzielen. (Dieser Faktor hat nichts mit dem Faktor  $a$  in

obiger Gleichung zu tun. So ist z.B.  $\text{cm}^3$  immer noch eine kohärente Einheit.)

### 1.1.4. Rechnen mit Einheiten

Häufig muss zwischen Einheiten gewechselt werden und nicht selten treten dabei Probleme auf. Ein sicherer Weg ist das Multiplizieren mit Brüchen, die den Wert eins haben. Als Beispiel soll die Geschwindigkeit eines Läufers, der 100 m in 10 s läuft, also  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  umgerechnet werden:

$$10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Einheiten dienen auch als ein erster Test für aufgestellte Gleichungen. So müssen die Summanden bei Addition und Subtraktion, sowie die Werte auf beiden Seiten von Gleichungen und Ungleichungen Einheiten haben, die zum Messen gleicher Größe verwendet werden. Wenn zur Berechnung einer Zeit am Ende eine Strecke heraus kommt, so muss zweifelsohne ein Fehler vorliegen.

Des Weiteren dürfen die Argumente vieler Funktionen keine Einheit haben. Beispiele sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Hat z.B. der Sinus ein Argument mit der Einheit Meter, so muss ein Fehler vorliegen. Das wird spätestens dadurch deutlich, dass die Strecke, gemessen in Meter, dann auch z.B. in Kilometer oder inch umgerechnet werden kann, und der Sinus mit anderen Argumenten dann auch andere Werte liefert.

Korrekte Einheiten sind noch kein Garant für eine korrekte Gleichung. Mathematisch ausgedrückt sind korrekte Einheiten eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung für eine korrekte Formel.

### 1.1.5. Messfehler

Das Messen einer kontinuierlichen Größe bringt einen Messfehler mit sich. Dabei unterscheiden wir zwischen

*absoluten* und *relativen* Fehlern.

Der *absolute* Fehler  $F$  ist die Abweichung zwischen dem abgelesenen Wert  $x_a$  und dem realen Wert  $x_r$ :

$$F = \Delta x = x_a - x_r$$

Der *relative* Fehler  $f$  ist der absolute Fehler  $F$  geteilt durch den realen Wert  $x_r$ :

$$f = \frac{\Delta x}{x_r} = \frac{x_a}{x_r} - 1 \quad \text{für } x_r \neq 0$$

Die Ursachen von Fehlern können vielseitig sein. Zunächst gibt es *grobe Fehler* aufgrund unsachgemäßer Messungen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll. Es wird davon ausgegangen, dass die Messungen mit „gesundem Ingenieur-Verstand“ durchgeführt werden. Des Weiteren wird zwischen *systematischen* und *zufälligen* Fehlern unterschieden.

*Systematische Fehler* haben, wie der Name vermuten lässt, eine systematische Ursache. Dazu gehören z.B. schlecht abgeglichene Messinstrumente, abweichende Messbedingungen (Temperatur, Luftfeuchtigkeit etc.) oder eine ungenaue Spannungsversorgung. Eine besondere Art der systematischen Fehler sind die *konstanten Fehler*. Sie entstehen z.B. durch verschobene Skalen, verstellte Uhren oder das schräge Ablesen von Zeigerinstrumenten. Der abgelesene Wert ist um einen konstanten Wert zu groß oder zu klein. Bei der Messung von Differenzen heben sich konstante Fehler auf. So kann z.B. mit einer verstellten Uhr dennoch eine genauere Zeitspanne gemessen werden.

*Zufällige Fehler* zeichnen sich dadurch aus, dass sie genauso oft positiv wie negativ auftreten. So wird bei der Messung der mittleren Lärmbelästigung an einer Autobahn bei jeder Messung ein etwas anderer Wert ermittelt. Prinzipiell kann der zufällige Fehler durch wiederholte Messungen beliebig reduziert werden. Häufig sind aber wiederholte Messungen nicht möglich, oder der verbleibende Fehler wird durch systematische Fehler begrenzt. Die Statistik beschäftigt sich ausführlich mit diesem Thema, auf dass hier nicht weiter eingegangen wird.

### 1.1.6. Fehlerfortpflanzung

Oft besteht eine gesuchte Messgröße aus einer Kombination mehrerer Messgrößen. So wird z.B. die Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers üblicherweise über die zurückgelegte Strecke  $\Delta d$  während eines Zeitintervalls  $\Delta t$  ermittelt:  $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$ . Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt dann von den Fehlern der einzelnen Messungen ab.

Sind für eine gesuchte Größe  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die Fehler  $\Delta x_i$  der einzelnen Messgrößen  $x_i$  bekannt und relativ klein ( $|\Delta x_i| \ll x_i$ ), so kann der Fehler der gesuchten Größe  $y$  mit dem Gesetz zur *Fehlerfortpflanzung* abgeschätzt werden:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (1.1)$$

Beispiel: Für die Messung der Schallgeschwindigkeit wurden zwei Mikrofone in einem Abstand  $d$  von 30 m auf 2 cm genau positioniert. Es wurde ein Knall erzeugt, und die Zeitdifferenz  $t$  der Signale an den Mikrofonen mit 88,3 ms auf 0,5 ms genau gemessen. Die

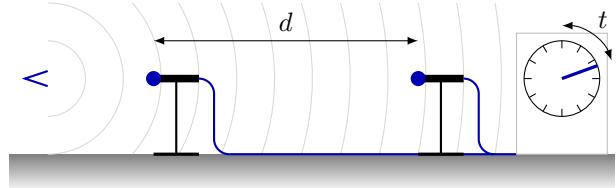


Abbildung 1.1.: Messung der Schallgeschwindigkeit.

gemessene Schallgeschwindigkeit beträgt:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{30 \text{ m}}{88,3 \text{ ms}} = \underline{\underline{339,8 \text{ m/s}}}$$

Der zu erwartende Messfehler beträgt in etwa:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \left| \frac{\partial}{\partial d} \frac{d}{t} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{t} \right| \Delta t \\ &= \left| \frac{1}{t} \right| \Delta d + \left| -\frac{d}{t^2} \right| \Delta t \\ &= \left| \frac{1}{88,3 \text{ ms}} \right| \cdot 2 \text{ cm} + \left| \frac{-30 \text{ m}}{(88,3 \text{ ms})^2} \right| \cdot 0,5 \text{ ms} \\ &= 0,23 \text{ m/s} + 1,92 \text{ m/s} = \underline{\underline{2,15 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

Wir wollen drei Sonderfälle betrachten: Erstens, die Fehlerfortpflanzung bei Summen und Differenzen. Mit  $y = f(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$  und den Messfehlern  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  folgt für  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \pm x_2) \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 \pm x_2) \right| \Delta x_2 \\ &= |1| \Delta x_1 + |\pm 1| \Delta x_2 \\ &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Das heißt:

*Bei Summen (und Differenzen) addieren sich die absoluten Fehler.*

Zweitens, die Fehlerfortpflanzung bei der Multiplikation liefert ein ähnliches Bild. Mit  $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  und den Messfehlern  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  folgt für den relativen Fehler  $\Delta y/|y|$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{|y|} &= \frac{1}{|x_1 x_2|} \left( \left| \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \right) \\ &= \frac{1}{|x_1 x_2|} (|x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2) \\ &= \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Es bleibt dem Leser zu überprüfen, dass sich bei einer Division ebenfalls die relativen Fehler addieren.

Das heißt:

*Bei Multiplikationen (und Divisionen) addieren sich die relativen Fehler.*

Drittens, bei Potenzen handelt es sich um eine  $n$ -fache Multiplikation: Mit  $y = f(x, n) = x^n$  folgt für den relativen Fehler  $\Delta y / |y|$ :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{|y|} &= \frac{1}{|x^n|} \left| \frac{\partial x^n}{\partial x} \right| \Delta x \\ &= \frac{1}{|x^n|} |n x^{n-1}| \Delta x \\ &= \frac{1}{|x^n|} |n x^n| \frac{\Delta x}{|x|} \\ &= |n| \frac{\Delta x}{|x|}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Das heißt:

*Bei Potenzen werden die relativen Fehler mit dem Betrag des Exponenten multipliziert.*

**Beispiel:** Sie wollen mit  $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$  die kinetische Energie eines Körpers bestimmen und konnten die Masse  $m$  auf 0,5% und die Geschwindigkeit auf 1% genau bestimmen. Wie wirken sich die Ungenauigkeiten auf die kinetische Energie aus?

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &= \left| \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial v} \right| \Delta v \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial m} \frac{m}{2} v^2 \right| \cdot 0,005 \cdot m + \left| \frac{\partial}{\partial v} \frac{m}{2} v^2 \right| \cdot 0,01 \cdot v \\ &= \frac{m}{2} v^2 \cdot 0,005 + 2 \cdot \frac{m}{2} v^2 \cdot 0,01 \\ &= E_{\text{kin}} \cdot 0,005 + 2 \cdot E_{\text{kin}} \cdot 0,01\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = 0,005 + 2 \cdot 0,01 = \underline{\underline{2,5\%}}$$

Wir können uns auch daran erinnern, dass sich bei der Multiplikation die relativen Fehler addieren und bei Potenzen diese mit dem Betrag des Exponenten multipliziert werden:

$$\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = 0,5\% + 2 \cdot 1\% = \underline{\underline{2,5\%}}$$

## 1.2. Vektoren zur Beschreibung von gerichteten Größen

In diesem Abschnitt betrachten wir grundlegende Eigenschaften der Vektorrechnung. Leser, die mit der Vektorrechnung bereits vertraut sind, können diesen Abschnitt überspringen.

### 1.2.1. Skalare und Vektoren

Größen, die durch eine reelle Zahl vollständig dargestellt werden können, werden *Skalare* genannt. Beispiele sind Temperatur, Masse, Energie, Leistung etc.

Andere Größen, die zu ihrer vollständigen Beschreibung zusätzlich Angaben über die Richtung und ab-

und zu auch über ihren Drehsinn benötigen, werden *Vektoren* genannt. Beispiele sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Rotation, elektrisches Feld etc.

In diesem Skript werden Vektoren in Formeln durch fett gedruckte Buchstaben dargestellt, z.B.  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  oder  $\mathbf{a}$ . Andere übliche Darstellungen sind mit einem Pfeil über dem Buchstaben ( $\vec{r}$ ) oder mit einem Strich unter dem Buchstaben ( $\underline{r}$ ). Skalare werden durch nicht fett gedruckte Buchstaben dargestellt, z.B.  $m$ ,  $t$  oder  $P$ . Wird ein Vektor wie ein Skalar dargestellt, so ist damit dessen Betrag gemeint:

$$r = |\mathbf{r}|$$

### 1.2.2. Kartesische Koordinaten

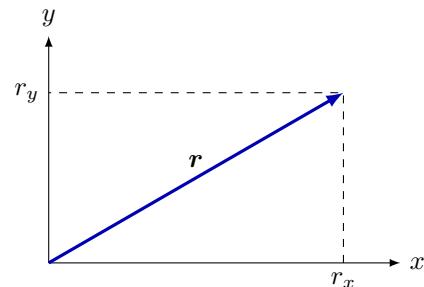


Abbildung 1.2.: Kartesische Koordinaten eines Vektors.

Vektoren werden meist in einem Kartesischen Koordinatensystem dargestellt, wobei der Vektor durch seine Kartesischen Koordinaten beschrieben wird. Die zwei oder drei Koordinaten werden zu einem mathematischen Vektor zusammengefasst:

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y)$$

#### In der Mathematik gilt:

Zeilen- und Spaltenvektoren werden unterschieden:

$$(r_x, r_y) \neq \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

Ein Vektor  $\mathbf{r}$  wird als Spaltenvektor angenommen:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

Die Umrechnung zwischen Zeilen- und Spaltenvektor erfolgt mittels Transponierung:

$$(r_x, r_y) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}^T \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = (r_x, r_y)^T$$

Um Platz zu sparen werden Spaltenvektoren häufig durch transponierte Zeilenvektoren dargestellt:

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y)^T$$

## Vektoren in der Physik:

Eine Differenzierung zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren ist nicht nötig. Von daher wird die einfache Schreibweise der Zeilenvektoren verwendet:

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y)$$

## 1.2.3. Polare und Kartesische Koordinaten

Ein Vektor kann unterschiedlich dargestellt werden. Für den zweidimensionalen Fall bieten sich zwei Möglichkeiten an: Die Beschreibung durch *kartesische* und *polare* Koordinaten.

Im kartesischen Koordinatensystem wird ein Vektor durch zwei rechtwinklig aufeinander stehende Koordinaten wiedergegeben, siehe Abbildung 1.3. Im polaren Koordinatensystem wird der selbe Vektor durch Betrag („Länge“ des Vektors) und Winkel (von der positiven x-Achse im Uhrzeigersinn gemessen) dargestellt.

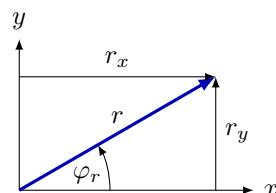


Abbildung 1.3.: Ein im Vektor Koordinatensystem.

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 1.3 lassen sich die kartesischen Koordinaten mit den folgenden Gleichungen aus den polaren Koordinaten bestimmen:

$$r_x = r \cos \varphi_r \quad (1.5)$$

$$r_y = r \sin \varphi_r \quad (1.6)$$

Für den umgekehrten Fall lässt sich Betrag und Winkel wie folgt berechnen:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (1.7)$$

$$\varphi_r = \arctan2(r_y, r_x) \quad (1.8)$$

Der Betrag eines Vektors wird durch senkrechte Striche vor und nach dem Vektor angedeutet, z.B.  $|\mathbf{r}|$ . Die Arcustangens-Funktion mit zwei Argumenten  $\arctan2()$  bestimmt den Winkel über alle vier Quadranten des Koordinatensystems:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Bei einem Betrag von null ( $|\mathbf{r}| = 0$ ) ist der Winkel undefiniert.

## 1.2.4. Dreidimensionale Koordinaten

Für dreidimensionale Fragestellungen bieten sich neben dem kartesischen Koordinatensystem noch das *zyklindrische* und das *sphärische* Koordinatensystem an.

Im *zyklindrischen* Koordinatensystem wird ein Vektor durch polare Koordinaten einer Ebene  $r_{xy}$  und  $\varphi$  und die Höhe  $z$  ausgedrückt, siehe Abbildung 1.4.

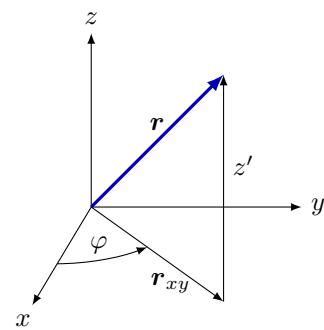


Abbildung 1.4.: Zylindrische Koordinaten.

Mit  $\mathbf{r}_{xy} = (x, y)$  als den auf die  $xy$ -Ebene projizierten Vektor  $\mathbf{r}$  ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= r_{xy} \cos \varphi & r_{xy} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r_{xy} \sin \varphi & \varphi &= \arg(\mathbf{r}_{xy}) \\ z &= z' & z' &= z \end{aligned}$$

Im *sphärischen* Koordinatensystem wird ein Vektor durch den Abstand zum Koordinatenursprung  $r$ , dem Polarwinkel  $\vartheta$  (Winkel zwischen positiver  $z$ -Achse und Vektor) und dem Azimutwinkel  $\varphi$  (Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und dem auf die  $xy$ -Ebene projizierten Vektor  $\mathbf{r}_{xy} = (x, y)$ ) dargestellt. Andere Namen für dieses Koordinatensystem sind *Kugel-Koordinatensystem* oder *räumliches Polar-Koordinatensystem*.

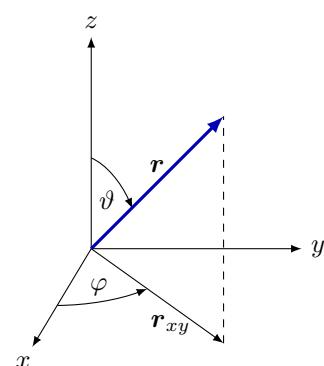


Abbildung 1.5.: Sphärische Koordinaten.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ z &= r \cos \vartheta & \varphi &= \arg(\mathbf{r}_{xy}) \end{aligned}$$

## 1.2.5. Einheitsvektoren

Einheitsvektoren haben den Betrag eins und eine beliebige Richtung. Ein beliebiger Vektor  $\mathbf{a}$  kann als Produkt des dazugehörigen Einheitsvektors  $\mathbf{e}$  und dem Betrag des Vektors  $|\mathbf{a}|$  dargestellt werden:  $\mathbf{a} = \mathbf{e}|\mathbf{a}|$ .

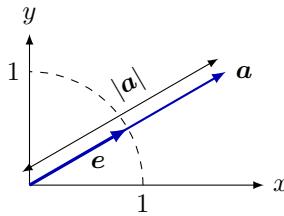


Abbildung 1.6.: Vektor als Produkt von Einheitsvektor und Betrag.

Von besonderem Interesse sind die Einheitsvektoren in Richtung der kartesischen Koordinaten  $e_x$ ,  $e_y$  und  $e_z$ , siehe Abbildung 1.7. Mit ihnen lassen sich Vektoren als Gleichung darstellen:

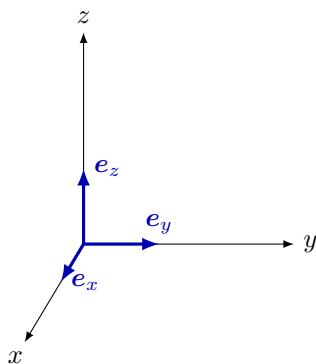


Abbildung 1.7.: Einheitsvektoren im dreidimensionalen Koordinatensystem.

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

Andere verbreitete Notationen für die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem sind  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  oder  $\mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{e}_k$ .

## 1.2.6. Addition von Vektoren

Um die Summe von zwei Vektoren zu bilden, müssen die kartesischen Koordinaten addiert werden, siehe Abbildung 1.8.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$(a_x, a_y) + (b_x, b_y) = (c_x, c_y)$$

$$(a_x + b_x, a_y + b_y) = (c_x, c_y)$$

## 1.2.7. Subtraktion von Vektoren

Zur Bildung der Differenz zwischen zwei Vektoren müssen die kartesischen Koordinaten subtrahiert werden, siehe Abbildung 1.9.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

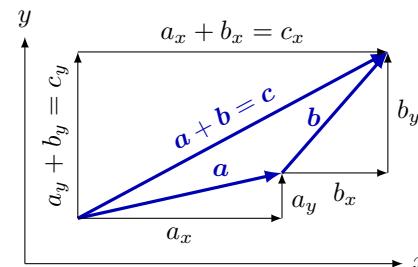


Abbildung 1.8.: Addition von Vektoren.

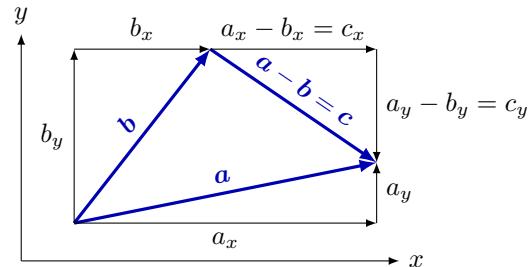


Abbildung 1.9.: Subtraktion von Vektoren.

$$(a_x, a_y) - (b_x, b_y) = (c_x, c_y)$$

$$(a_x - b_x, a_y - b_y) = (c_x, c_y)$$

## 1.2.8. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Wird ein Vektor  $\mathbf{a}$  mit einem Skalar  $k$  multipliziert, so werden die kartesischen Koordinaten des Vektors mit diesem Skalar multipliziert:

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a} = k(a_x, a_y) = (ka_x, ka_y)$$

In polarer Darstellung wird der Betrag des Vektors mit dem Betrag des Skalars multipliziert. Für negative Skalare muss der Winkel entsprechend um  $180^\circ$  gedreht werden.

$$|\mathbf{b}| = |k\mathbf{a}| = |k||\mathbf{a}|$$

$$\varphi_b = \begin{cases} \varphi_a & \text{für } k \geq 0 \\ \varphi_a + \pi & \text{für } k < 0 \text{ und } \varphi_a \leq 0 \\ \varphi_a - \pi & \text{für } k < 0 \text{ und } \varphi_a > 0 \end{cases}$$

Sollen zwei Vektoren miteinander multipliziert werden, so muss zwischen *Skalar-* und *Vektorprodukt* unterschieden werden.

## 1.2.9. Skalarprodukt

Das *Skalar-* oder auch *Punktprodukt* ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi_{ab} \quad (1.10)$$

Dabei steht  $\varphi_{ab}$  für den Winkel zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Das Ergebnis des Skalarprodukts ist ein Skalar, also eine Größe ohne Richtung.

Für kartesische Koordinaten, hier mit drei Dimensionen, gilt:

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.11)$$

Anwendung ist z.B. ein Schienenfahrzeug, auf das eine Kraft wirkt. Je besser die Richtung der Kraft mit der Richtung der Schienen übereinstimmt, desto höher ist die Wirkung auf das Fahrzeug.

### 1.2.10. Vektorprodukt

Das *Vektor-* oder auch *Kreuzprodukt* von zwei Vektoren ist wieder ein Vektor, der senkrecht auf beiden ursprünglichen Vektoren steht. Der Betrag entspricht der Fläche eines durch die ursprünglichen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi_{ab} \quad (1.12)$$

$\varphi_{ab}$  ist der zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Winkel. Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, d.h. die beiden Argumente des Vektorprodukts dürfen nicht vertauscht werden. Beim Vertauschen der Argumente kehrt sich das Vorzeichen um:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Die Richtung des Vektors  $\mathbf{c}$  kann über die „Rechte-Hand-Regel“ ermittelt werden: Die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  haben die gleiche Richtung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand.

Eine andere Eselsbrücke ist eine Schraube mit einem Rechtsgewinde: Wird die Schraube um  $\mathbf{c}$  herum von  $\mathbf{a}$  über den kürzesten Weg nach  $\mathbf{b}$  gedreht, so bewegt sich die Schraube in Richtung  $\mathbf{c}$ .

Für dreidimensionale kartesische Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y \\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.13)$$

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht der Fläche des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms, siehe Abbildung 1.10.

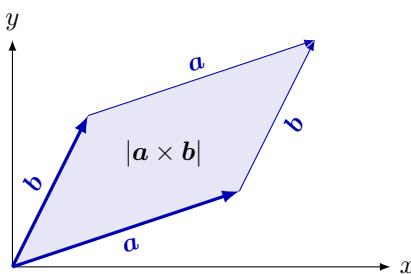


Abbildung 1.10.: Vektorprodukt als Fläche eines Parallelogramms.

Anwendung ist z.B. ein mit  $Q$  geladenes Teilchen, dass sich durch ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$  mit Geschwindigkeit

$\mathbf{v}$  bewegt. Es entsteht eine Kraft  $\mathbf{F}$  (die sog. *Lorentzkraft*) die senkrecht zu Teilchenbahn und Magnetfeld steht.

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

### 1.3. Aufgaben

**Aufgabe 1.1:** Rechnen Sie folgende Werte in kohärente Einheiten um. (Suchen Sie ggf. im Internet nach der Bedeutung der Einheiten.)

- a) 5 t
- b) 2 cl
- c) 72 km/h
- d) 70 mph (miles per hour)

**Aufgabe 1.2:** Sie unterhalten sich mit einem englischen Freund aus London über den Benzinverbrauch Ihrer Fahrzeuge. Sie freuen sich über Ihre gemessenen  $6,1 \frac{1}{100} \text{ km}$  worauf Ihr Freund von 42 MPG spricht. Welchen Fahrzeug verbraucht weniger Benzin?

**Aufgabe 1.3:** Betrachten Sie folgende scheinbare Lösungen von Aufgaben. Welche können unmöglich richtig sein?

- a)  $v = 100 \text{ km} + 1,5 \text{ h}$
- b)  $s = 1,2 \text{ km} - 1200 \text{ cm}$
- c)  $y = \sin(2\pi \cdot 3 \text{ s})$
- d)  $t = \sqrt{3 \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \cdot (4 \text{ m})^{\frac{1}{2}}} + 2 \text{ s}$

**Aufgabe 1.4:** Welche der folgenden Gleichungen sind korrekt?

- a)  $1 \text{ m} = 10^9 \text{ nm}$
- b)  $10^4 \text{ ns} = 0,01 \text{ ms}$
- c)  $1,5 \text{ h} = 5400 \text{ s}$
- d)  $100 \text{ K} - 50 \text{ K} = 100^\circ \text{C} - 50^\circ \text{C}$

**Aufgabe 1.5:** Sie lassen einen Stein aus einer Höhe  $h = 5 \text{ m} \pm 5 \text{ cm}$  mit einer vertikalen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  fallen. Die Erdbeschleunigung  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  konnten Sie auf 2% genau bestimmen. Sie berechnen die Position des Steins zum Zeitpunkt  $t$  mit der Formel:

$$s = h + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Wie genau ist Ihr Ergebnis der Position  $s$  nach  $t = 1 \text{ s} \pm 15 \text{ ms}$ ?

**Aufgabe 1.6:** Rechnen Sie die folgenden Vektoren in Polare Koordinaten um. Geben Sie die Winkel in Bogenmaß an.

- a)  $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (1, 2)$
- b)  $\mathbf{b} = (b_x, b_y) = (0, -2)$
- c)  $\mathbf{c} = (c_x, c_y) = (-1, -1)$

**Aufgabe 1.7:** Rechnen Sie die folgenden Vektoren in kartesische Koordinaten um. Die Winkel sind in Bogenmaß angegeben.

- a)  $a = \sqrt{2}, \varphi_a = \pi/4$
- b)  $b = 5, \varphi_b = \pi/6$

c)  $c = 1$  ,  $\varphi_c = -3\pi/4$

**Aufgabe 1.8:** Es seien die Vektoren  $\mathbf{a} = (2, 1)$  und  $\mathbf{b} = (1, -1)$  gegeben. Berechnen Sie folgende Aufgaben:

- a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- b)  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
- c)  $4 \cdot \mathbf{a}$
- d)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- e)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

**Aufgabe 1.9:** Es seien die Vektoren  $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$  und  $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$  gegeben. Berechnen Sie folgende Aufgaben:

- a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- b)  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
- c)  $2 \cdot \mathbf{a}$
- d)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- e)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

## 2. Bewegung auf einer Geraden

In diesem Kapitel betrachten wir einen Körper, der sich auf einer Geraden bewegt. Das kann ein fahrendes Auto auf der Straße sein, ein vom Baum fallender Apfel, ein Lichtstrahl oder die Verschiebung der Kontinentalplatten. Immer haben wir es mit einer sich ändernden *Position*, einer *Geschwindigkeit* und der Änderung der Geschwindigkeit, der *Beschleunigung* zu tun.

### 2.1. Position, Bahn, Strecke

#### 2.1.1. Position

Bewegt sich ein Körper auf einer Geraden, so kann seine Position relativ zu einem Fixpunkt auf der Geraden zu jedem Zeitpunkt mit jeweils einer Zahl angegeben werden. Hier tauchen die Begriffe *Position* und *Zeit* auf. Der Zusammenhang zwischen Position und Zeit kann durch eine Funktion beschrieben werden. Mit  $x$  und  $t$  für Position und Zeit schreiben wir  $x = f(t)$  bei der  $f$  die Zeit  $t$  auf die Position  $x$  abbildet.

Für die beiden Größen *Zeit* und *Position* muss jeweils ein Bezugspunkt definiert werden. Wann ist die Zeit null erreicht, und wo befindet sich die Position null? Die Antwort hängt von dem betrachteten Problem und dem Ermessen des Beobachters ab.

Beispiel: Die schnellsten Läufer brauchen für 100 Meter etwa 10 Sekunden. Um die Position eines solchen Läufers entlang der Laufstrecke zu beschreiben, bietet es sich an, den Startschuss als Zeitpunkt null, und die Startlinie als Position null zu definieren, siehe Abbildung 2.1.

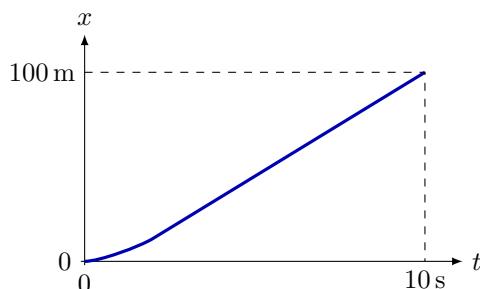


Abbildung 2.1.: Position eines Läufers über eine Strecke von 100 m.

#### 2.1.2. Bahn und Strecke

Auch wenn sich in diesem Kapitel die Körper nur auf einer Geraden bewegen, so kann die Gerade beliebig im Raum platziert sein. Die Straße, auf der wir ein Auto beobachten, kann beliebig auf der Erdoberfläche ausgerichtet sein. Der bereits erwähnte Apfel fällt senkrecht

herunter, dagegen kann sich ein Lichtstrahl beliebig im Raum ausbreiten.

Die *Bahn* beschreibt die Linie, auf der sich der Körper bewegt. In diesem Kapitel ist diese Linie immer eine Gerade und kann durch eine Geradengleichung beschrieben werden. Einfacher ist es, die Position entlang dieser Geraden zu betrachten. Wir führen dafür den Begriff der *Strecke* ein. Die Strecke ist die zurückgelegte Distanz auf der Bahn, siehe Abbildung 2.2.

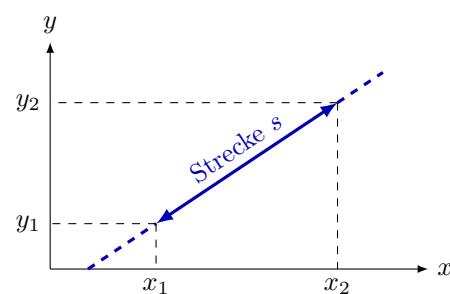


Abbildung 2.2.: Der Weg als Änderung der Position mit der Zeit im zweidimensionalen Raum.

In dem betrachteten Zeitraum  $\Delta t$  legt der Körper auf seiner Bahn die Strecke  $s$  zurück. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem wie in Abbildung 2.2 kann der Satz des Pythagoras angewendet werden:  $s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ . Im dreidimensionalen Raum gilt entsprechend:  $s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ . Auf kurvigen Bahnen wird dies etwas aufwändiger, dazu später mehr.

### 2.2. Geschwindigkeit

*Geschwindigkeit* ist die Änderung der Position eines Körpers über die Zeit. Die Geschwindigkeit erhält das Formelzeichen  $v$  und wird in Metern pro Sekunde gemessen.

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Viele der hier gezeigten Schritte werden wir ein zweites Mal auf dem Weg von der Geschwindigkeit hin zur Beschleunigung gehen. Dazu im Abschnitt 2.3 mehr.

#### 2.2.1. Mittlere Geschwindigkeit

Wird in der Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  die Strecke  $\Delta s = s_2 - s_1$  zurückgelegt, so ergibt sich die *mittlere Geschwindigkeit* durch den Quotienten der zurückgelegten Strecke und der benötigten Zeit:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

In Abbildung 2.3 ist die zurückgelegte Strecke als Funktion der Zeit aufgetragen. Die Steigung der Kurve an einem Punkt entspricht der *momentanen Geschwindigkeit*, die Steigung zwischen den beiden dargestellten Punkten der *mittleren Geschwindigkeit*.

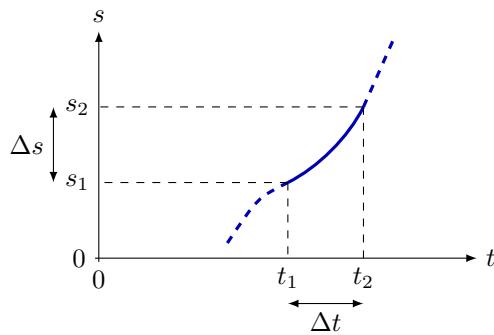


Abbildung 2.3.: Mittlere Geschwindigkeit als Strecke pro Zeit.

## 2.2.2. Momentane Geschwindigkeit

Zur Ermittlung der *momentanen Geschwindigkeit* lassen wir das betrachtete Zeitintervall immer kleiner werden:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.1)$$

Der Punkt über dem  $s$  steht für die Ableitung nach der Zeit.

Durch Integration von (2.1) kann die Strecke des Körpers als Funktion der Geschwindigkeit ermittelt werden:

$$s(t) = \int v(t) dt \quad (2.2)$$

## 2.2.3. Konstante Geschwindigkeit

Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$ , so wird von einer *gleichförmigen Bewegung* gesprochen, siehe Abbildung 2.4.

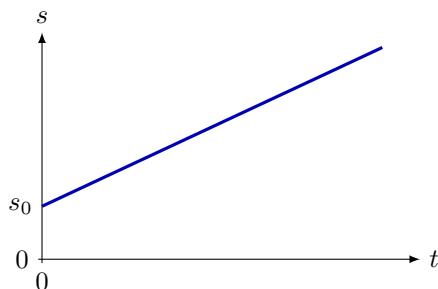


Abbildung 2.4.: Gleichförmige Bewegung.

Mit  $s(t)$  als die Position entlang der Strecke,  $v_0$  als den Betrag der Geschwindigkeit und  $s_0$  als die Position des Körpers zum Zeitpunkt  $t = 0$  lässt sich das Integral in (2.2) allgemein lösen:

$$s(t) = v_0 t + s_0 \quad (2.3)$$

Wird bei einer gleichförmigen Bewegung der Ursprung des Koordinatensystems und der Startzeitpunkt geeignet gewählt, so nimmt die Konstante  $s_0$  den Wert null an, und die Gleichung reduziert sich zu  $s(t) = v_0 t$ .

Weitere Einheiten für die Geschwindigkeit: Im Straßenverkehr werden km/h und mph (miles per hour) verwendet. (Das umgangssprachliche „Stundenkilometer“ ergibt physikalisch keinen Sinn und sollte vermieden werden.) Für die Plattentektonik (Verschiebung der Kontinentalplatten) wird gerne Zentimeter pro Jahr (cm/a) verwendet, um nur einige zu nennen.

## 2.3. Beschleunigung

*Beschleunigung* ist die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers über die Zeit. Die Beschleunigung erhält das Formelzeichen  $a$  und wird in Metern pro Sekunde zum Quadrat gemessen.

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$

Erhöht ein Körper seine Geschwindigkeit, so erfährt er eine Beschleunigung in Richtung seiner Bewegung. Wird ein Körper abgebremst, so erfährt er eine Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung. In beiden Fällen wird das Wort *Beschleunigung* verwendet.

### 2.3.1. Mittlere Beschleunigung

Wird in der Zeit  $\Delta t$  die Geschwindigkeit eines Körpers um  $\Delta v$  verändert, so ergibt sich die *mittlere Beschleunigung* durch den Quotienten von  $\Delta v$  und  $\Delta t$ :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

In Abbildung 2.5 ist die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit aufgetragen. Die Steigung der Kurve entspricht der *momentanen Beschleunigung*, die Steigung zwischen den beiden dargestellten Punkten der *mittleren Beschleunigung*.

### 2.3.2. Momentane Beschleunigung

Zur Ermittlung der *momentanen Beschleunigung* lassen wir das Zeitintervall immer kleiner werden:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (2.4)$$

Durch Integration von (2.4) kann allgemein die Geschwindigkeit des Körpers ermittelt werden:

$$v(t) = \int a(t) dt \quad (2.5)$$

Da die Geschwindigkeit die erste Ableitung der Position ist, kann direkt der Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Position des Körpers hergestellt werden:

## Anwendung 2.1: Durchschnitts-Geschwindigkeit

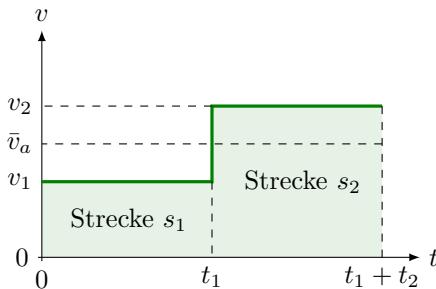
Ein Körper bewegt sich für die Zeit  $t_1$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  über die Strecke  $s_1$ . Danach bewegt er sich für die Zeit  $t_2$  mit der Geschwindigkeit  $v_2$  über die Strecke  $s_2$ .

Frage: Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit a) wenn die zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  gleich sind, und b) wenn die beiden Strecken  $s_1$  und  $s_2$  gleich sind?

Für beide Teilaufgaben erstellen wir das  $v(t)$ -Diagramm, siehe unten. Die mittlere Geschwindigkeit entspricht im  $v(t)$ -Diagramm einer horizontalen Linie, unter der sich die gleiche Fläche befindet, wie für die beiden Teilstrecken  $s_1$  und  $s_2$ .

Die zurückgelegte Strecke ist mit  $s_1 + s_2 = v_1 t_1 + v_2 t_2$  gegeben. Daraus ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}$$



Für den Fall a) mit  $t = t_1 = t_2$  folgt:

$$\bar{v}_a = \frac{v_1 t + v_2 t}{t + t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Für den Fall b) mit  $s = s_1 = s_2$  und  $t_1 = \frac{s}{v_1}$  bzw.  $t_2 = \frac{s}{v_2}$  folgt:

$$\bar{v}_b = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s + s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Besonders die zweite Lösung mag den einen oder anderen Leser überraschen. Wenn z.B. ein Auto zunächst eine Strecke mit 50 km/h und dann die gleiche Strecke mit 100 km/h fährt, so beträgt die Durchschnitts-Geschwindigkeit nicht 75 km/h, sondern nur  $66\frac{2}{3}$  km/h.

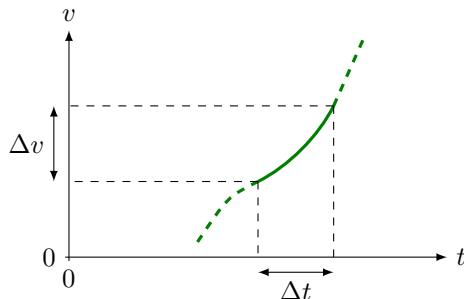
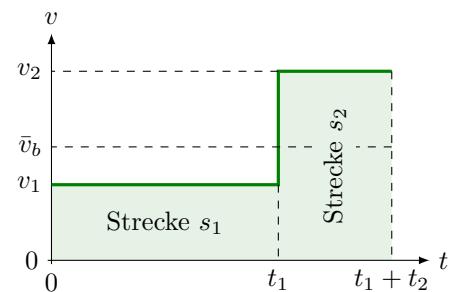


Abbildung 2.5.: Mittlere Beschleunigung als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit.

Mit  $s(t)$  und  $v(t)$  als Strecke und Geschwindigkeit entlang der Bahn,  $a_0$  als die Beschleunigung in Richtung der Bahn und  $v_0$  und  $s_0$  als Geschwindigkeit und Position zum Zeitpunkt  $t = 0$  lassen sich die Integrale in (2.5) und (2.7) allgemein lösen:

$$v(t) = a_0 t + v_0 \quad \text{für } a_0 = \text{konst.} \quad (2.8)$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0 \quad \text{für } a_0 = \text{konst.} \quad (2.9)$$

Häufig können die Startbedingungen so gewählt werden, dass die Konstanten  $s_0$  und  $v_0$  gegen null gehen. Dadurch können die genannten Gleichungen weiter vereinfacht werden.

## 2.4. Darstellung im $v(t)$ -Diagramm

Das  $v(t)$ -Diagramm beschreibt die Darstellung einer Bewegung als Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit, siehe Abbildung 2.7.

Wird ein Körper im Zeitintervall  $t_2 - t_1$  beobachtet und im  $v(t)$ -Diagramm dargestellt, so entspricht die Fläche unter der Kurve der zurückgelegten Strecke, die Geschwindigkeit kann unmittelbar abgelesen werden, und die Steigung der Kurve gibt die Beschleunigung wieder.

Soll die Bewegung eines Körpers analysiert werden, so vermittelt die Darstellung im  $v(t)$ -Diagramm schnell

Die zwei Punkte über dem  $s$  bezeichnen die zweite Ableitung nach der Zeit.

### 2.3.3. Konstante Beschleunigung

Wird ein Körper in Richtung seiner Bahn konstant mit  $a_0$  beschleunigt, so ergeben sich einige Vereinfachungen, siehe Abbildung 2.6.

## Anwendung 2.2: Freier Fall

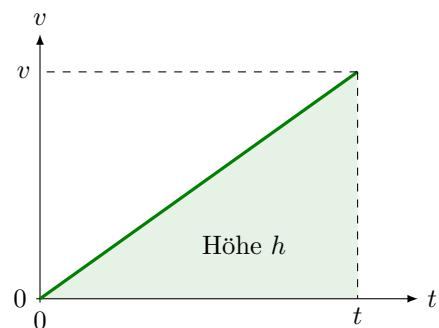
Frage: Wie lange braucht ein kleiner schwerer Stein bis auf den Boden, wenn er aus einem Turm fallen gelassen wird? Hinweis: Die Erdbeschleunigung beträgt an der Erdoberfläche etwa  $g_0 = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Lösung: Der Hinweis *kleiner schwerer Stein* deutet darauf hin, dass der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann. Da die Höhe des Turms nicht angegeben ist, gehen wir allgemein von der Höhe  $h$  aus. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ist null und wir setzen den Ursprung unseres Koordinatensystems auf die Stelle, an der der Stein fallen gelassen wird zum Zeitpunkt null ( $s_0 = s(t=0) = 0$ ), siehe Abbildung. Mit diesen Voraussetzungen kann Gleichung (2.9) nach der Zeit aufgelöst werden:

$$t(h) = \sqrt{\frac{2h}{g_0}}$$

Beispiel: Für eine Höhe von 10 Metern ergibt sich:

$$t(h=10 \text{ m}) = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{20 \text{ s}^2}{9,81}} \approx 1,43 \text{ s}$$



eine Vorstellung über die Abläufe im betrachteten Intervall.

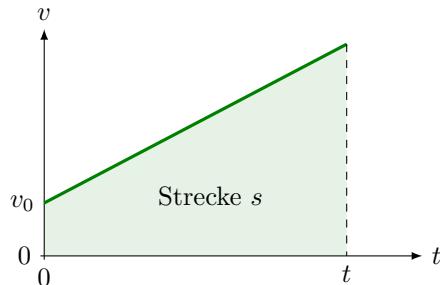


Abbildung 2.6.: Gleichförmige Beschleunigung.

## 2.5. Aufgaben

**Aufgabe 2.1:** Sie beobachten eine Murmel, die sich ungehindert auf einer geraden Bahn von den Koordinaten  $(x_1, y_1) = (20 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$  zu den Koordinaten  $(x_2, y_2) = (50 \text{ cm}, 70 \text{ cm})$  bewegt. Welche Strecke hat die Murmel zurückgelegt?

**Aufgabe 2.2:** Im Jahr 2011 lief Patrick Makau Musyoki aus Kenia den Berlin-Marathon (42,195 km) in nur 2:03:38 und hält damit bis heute den Weltrekord in dieser Disziplin. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in SI-Einheiten.

**Aufgabe 2.3:** Bei einem 100 m-Rennen werde der Startschuss auf der Zielgeraden gegeben. Wie groß ist der zeitliche Vorteil eines Läufers, der auf den Rauch und nicht auf den Knall der Pistole achtet? Nehmen Sie die Schallgeschwindigkeit mit 340 m/s an.

**Aufgabe 2.4:** Ein Vertreter möchte einen Kunden in einem 100 km entfernten an der Autobahn gelegenen Ort besuchen. In den Verkehrsnachrichten hört er, dass kurz vor dem Zielort der Verkehr über 25 Kilometer mit nur  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fließt. Wie schnell muss er die ersten 75 km fahren, damit er seinen Kunden innerhalb einer Stunde erreicht?

**Aufgabe 2.5:** *Hau den Lukas* ist nach wie vor eine Attraktion auf dem Jahrmarkt: Die Teilnehmer schlagen mit einem großen Hammer möglichst kräftig auf einen Amboss, der seinerseits einen Gegenstand an einer Führung in die Höhe fliegen lässt. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muss der Gegenstand in die Höhe

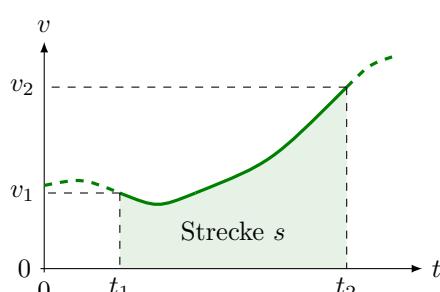


Abbildung 2.7.: Darstellung im  $v(t)$ -Diagramm.

geschossen werden, damit er eine Höhe von zehn Metern erreicht?

**Aufgabe 2.6:** Sie gehen in einen Zirkus und bewundern einen Jongleur, der seine Bälle bis knapp unter die Decke des Zirkuszelts wirft. Eine grobe Messung Ihrerseits ergibt, dass die Bälle jeweils etwa drei Sekunden in der Luft sind, und dass die Abwurfhöhe etwa 120 cm beträgt. Wie hoch ist das Zirkuszelt?

# 3. Bewegung im Raum

## 3.1. Position als Vektor

Die Position eines Punktes  $P$  kann durch dessen *Radiusvektor*, oder auch *Ortsvektor* beschrieben werden. Der *Radiusvektor*  $\mathbf{r}$  ist die Verbindung vom Koordinatenursprung  $O$  zum Punkt  $P$ , siehe Abbildung 3.1.

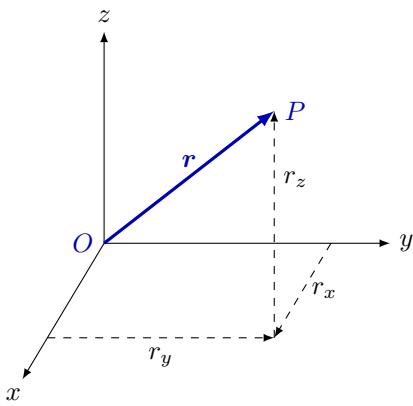


Abbildung 3.1.: Beschreibung des Punktes  $P$  durch seinen Radiusvektor  $\mathbf{r}$ .

Mit  $(r_x, r_y, r_z)$  für den Punkt  $P$  ergibt sich der dazugehörige Radiusvektor mit:

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z$$

## 3.2. Geschwindigkeit als Vektor

Zur vollständigen Beschreibung einer Geschwindigkeit ist neben der Angabe des Betrags auch die Angabe der Richtung nötig. Wir haben bereits gesehen, dass sich die *mittlere Geschwindigkeit*  $\bar{\mathbf{v}}$  durch den Quotienten von Positionsänderung  $\Delta\mathbf{r}$  und Dauer der Positionsänderung  $\Delta t$  ergibt.

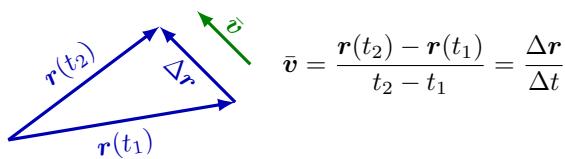


Abbildung 3.2.: Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{\mathbf{v}}$  während der Zeit  $\Delta t$ .

Lassen wir die Dauer der Positionsänderung gegen null gehen, so ergibt sich daraus die *momentane Geschwindigkeit*  $\mathbf{v}$ . Durch Radiusvektoren ausgedrückt ergibt sich für die momentane Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

Wie können wir den Ausdruck interpretieren? Im Zähler finden wir die Differenz  $\Delta\mathbf{r}$  von zwei Vektoren in Richtung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Ausgedrückt mit Einheitsvektoren können wir die Ableitung auf die kartesischen Komponenten  $r_x$ ,  $r_y$  und  $r_z$  übertragen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_x \mathbf{e}_x + \Delta r_y \mathbf{e}_y + \Delta r_z \mathbf{e}_z}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta r_x \mathbf{e}_x}{\Delta t} + \frac{\Delta r_y \mathbf{e}_y}{\Delta t} + \frac{\Delta r_z \mathbf{e}_z}{\Delta t} \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_x \mathbf{e}_x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_y \mathbf{e}_y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_z \mathbf{e}_z}{\Delta t} \\ &= \frac{dr_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{e}_z \\ &= \dot{r}_x \mathbf{e}_x + \dot{r}_y \mathbf{e}_y + \dot{r}_z \mathbf{e}_z \\ &= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Für die Ableitung des Vektors der Position  $\mathbf{r}$  nach der Zeit  $t$  müssen demnach die kartesischen Komponenten  $r_x$ ,  $r_y$  und  $r_z$  einzeln nach der Zeit  $t$  abgeleitet werden.

In Abbildung 3.3 ist die Bahn eines Körpers auf einer gebogenen Linie dargestellt. Zum Zeitpunkt  $t_1$  befindet sich der Körper an der Position  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$  und bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$ . Entsprechendes gilt zum Zeitpunkt  $t_2$ .

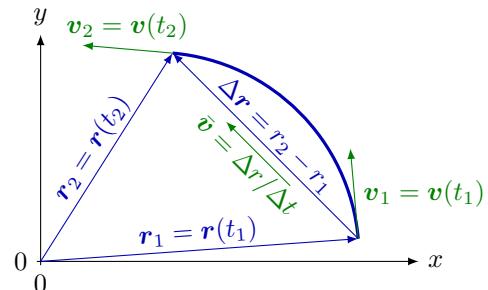


Abbildung 3.3.: Geschwindigkeit als Vektor.

Bei der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{\mathbf{v}}$  ist Vorsicht geboten. Die in Abbildung 3.3 eingetragene mittlere Geschwindigkeit ist jene eines Körpers, der sich in der gleichen Zeit auf einer geraden Linie zwischen den Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  bewegt. Da sich aber der beobachtete Körper auf einer gebogenen und damit längeren Bahn bewegt, ist die gemessene mittlere Geschwindigkeit auf seiner Bahn höher. Hier wird der Begriff *Bahngeschwindigkeit* verwendet.

## 3.3. Position und Geschwindigkeit

Wir haben uns bereits mit dem Zusammenspiel von Position und Geschwindigkeit auf einer geraden Linie

beschäftigt. Auf einer Linie gibt es nur zwei Möglichkeiten: der Körper bewegt sich a) in *positiver* Richtung, oder b) in *negativer* Richtung.

Für eine konstante Geschwindigkeit im Zeitintervall  $\Delta t$  bedeutet dies für a), dass sich die Position 'erhöht', und für b), dass sich die Position 'reduziert', siehe Abbildung 3.4 und 3.5.

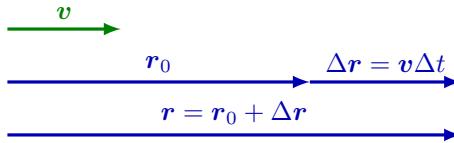


Abbildung 3.4.: Fall a): Geschwindigkeit  $v$  in *positiver* Richtung.

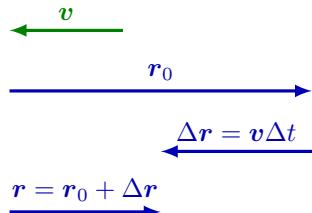


Abbildung 3.5.: Fall b): Geschwindigkeit  $v$  in *negativer* Richtung.

Vielleicht ist dem einen oder anderen Leser die Addition in der Beschriftung des unteren Vektors in Abbildung 3.5 aufgestoßen. Das hat seine Richtigkeit, denn das Vorzeichen ergibt sich aus der Richtung der Geschwindigkeit  $v$ . Der Betrag eines Vektors kann nicht negativ sein. Soll ein Vektor in die *negative* Richtung zeigen, so muss seine Richtung um  $180^\circ$  gedreht werden, aber sein Betrag bleibt *positiv*.

Was passiert, wenn die Geschwindigkeit in beliebiger Richtung und nicht parallel zur Position, ausgedrückt als Radiusvektor erfolgt? In Abbildung 3.6 wird deutlich, dass sich mit Vektoren dieselbe Gleichung ergibt wie im parallelen Fall. Für eine konstante Geschwindigkeit  $v$  im Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  gilt:

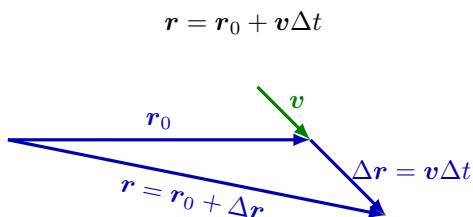


Abbildung 3.6.: Auswirkung einer Geschwindigkeit in beliebiger Richtung.

Um sich von der Einschränkung der *konstanten* Geschwindigkeit zu befreien, teilen wir das Intervall  $\Delta t$  in immer kleinere Teile ein, bis sich schließlich ein Integral ergibt, welches die Umkehrung von (3.1) darstellt:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt \quad (3.2)$$

Ausgedrückt mit Einheitsvektoren erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \int (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) dt \\ &= \int v_x dt \mathbf{e}_x + \int v_y dt \mathbf{e}_y + \int v_z dt \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  (Betrag und Richtung des Vektors ändern sich nicht), so kann in (3.2) das Integral aufgelöst werden:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}_0 dt = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad \text{für } \mathbf{v}_0 \text{ konst.} \quad (3.3)$$

Für das Lösen des unbestimmten Integrals führen wir die Konstante  $\mathbf{r}_0$  ein. Physikalisch entspricht das der Position des Körpers zum Zeitpunkt null. Wird bei einer Fragestellung der Ursprung des Koordinatensystems und der Startzeitpunkt geeignet gewählt, so nimmt die Konstante  $\mathbf{r}_0$  den Wert null an, und die Gleichung reduziert sich zu  $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t$ .

### 3.4. Beschleunigung als Vektor

So wie die Geschwindigkeit eine Änderung der Position über die Zeit ist, so stellt die Beschleunigung eine Änderung der Geschwindigkeit über die Zeit dar. Wir betrachten die *mittlere Beschleunigung*  $\bar{\mathbf{a}}$  als den Quotienten von Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \mathbf{v}$  und Dauer der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta t$ . Lassen wir  $\Delta t$  gegen null gehen, so ergibt sich daraus die *momentane Beschleunigung*  $\mathbf{a}$ . Mit Vektoren ausgedrückt folgt:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.4)$$

Wie können wir den Ausdruck interpretieren? Im Zähler finden wir die Differenz  $\Delta \mathbf{v}$  von zwei Vektoren in Richtung der Beschleunigung  $\mathbf{a}$ . Ausgedrückt mit Einheitsvektoren können wir die Ableitung auf die kartesischen Komponenten übertragen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x \mathbf{e}_x + \Delta v_y \mathbf{e}_y + \Delta v_z \mathbf{e}_z}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, um die mehrdimensionale Beschleunigung  $\mathbf{a}$  eines Körpers zu ermitteln, muss die räumliche Ableitung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nach der Zeit  $t$  ermittelt werden. Die Ableitung erfolgt, indem die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  einzeln für sich nach der Zeit  $t$  abgeleitet werden.

## 3.5. Geschwindigkeit und Beschleunigung

### 3.5.1. Beschleunigung entlang der Bewegung

Erfolgt die Beschleunigung entlang der Bewegungsrichtung, so gibt es nur zwei Möglichkeiten: a) die Beschleunigung wirkt in *gleicher* Richtung wie die Geschwindigkeit, oder b) die Beschleunigung wirkt in *entgegengesetzter* Richtung zur Geschwindigkeit.

Für eine konstante Beschleunigung im Zeitintervall  $\Delta t$  bedeutet dies für a), dass sich die Geschwindigkeit erhöht, und für b) dass sich die Geschwindigkeit reduziert, siehe Abbildung 3.7 und 3.8. Wenn wir umgangssprachlich von *abbremsen* sprechen, bedeutet dies in der Physik eine Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung.

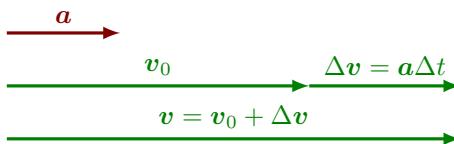


Abbildung 3.7.: Fall a): Beschleunigung  $a$  in *gleicher* Richtung wie die Bewegung.

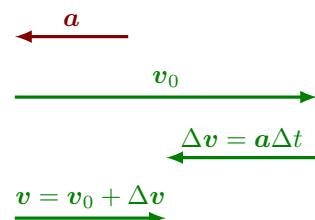


Abbildung 3.8.: Fall b): Beschleunigung  $a$  in *entgegen gesetzter* Richtung zur Bewegung.

### 3.5.2. Beschleunigung quer zur Bewegung

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass die Beschleunigung quer zur Bewegungsrichtung erfolgt. In Abbildung 3.9 ist oben der Fall dargestellt, dass ein Körper für eine recht große Zeitspanne  $\Delta t$  senkrecht zu seiner ursprünglichen Richtung beschleunigt wird. Das Ergebnis ist eine leicht erhöhte Geschwindigkeit und eine Richtungsänderung.

Wenn es nun unser Ziel ist, dass der Körper zu jedem Zeitpunkt quer zu seiner Bewegungsrichtung beschleunigt wird, so müssen wir gedanklich das betrachtete Zeitintervall immer weiter aufteilen, siehe Abbildung 3.9 unten für die Aufteilung in zwei Schritte. Lassen wir die Anzahl der Schritte gegen unendlich gehen bzw. die Schrittweite  $\Delta t$  gegen null gehen, so ändert sich nur die Bewegungsrichtung und der Betrag der Geschwindigkeit bleibt konstant. Ein Körper, der mit konstanter Geschwindigkeit seine Richtung gleichmäßig ändert beschreibt eine Kreisbahn, siehe Abbildung 3.10.

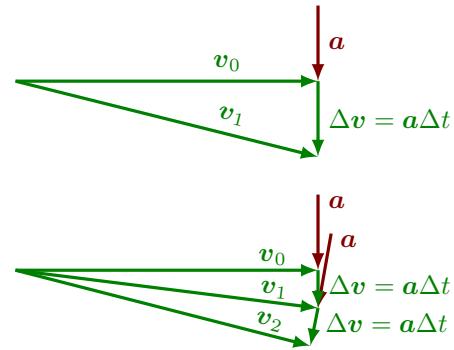


Abbildung 3.9.: Beschleunigung quer zur Bewegungsrichtung.

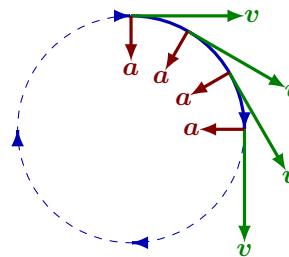


Abbildung 3.10.: Eine gleichmäßige seitliche Beschleunigung führt zu einer Kreisbewegung mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit.

Wird z.B. eine Rakete im Weltall seitlich zu ihrer Bewegungsrichtung gleichmäßig beschleunigt, so ändert sie ihre Richtung, nicht aber ihre Geschwindigkeit, und sie bewegt sich auf einer Kreisbahn.

Noch plakativer ist ein Ball, der an einem Faden um einen Mittelpunkt rotiert. Der Faden zieht den Ball zu jedem Zeitpunkt quer zu seiner Bewegung in Richtung Mittelpunkt und der Ball bewegt sich entlang einer Kreislinie.

Der Zusammenhang zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Radius einer Kreisbewegung lässt sich wie folgt herleiten: Ein Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$ . In Abbildung 3.11 ist links die Position des Körpers zu zwei Zeitpunkten dargestellt. Während der Zeit  $\Delta t$  bewegt sich der Körper von Position  $r_1$  zu Position  $r_2$ . Daraus folgend ändert sich der Winkel bezogen auf den Drehpunkt um  $\Delta\varphi$ , wobei sich die Richtung der Geschwindigkeit  $v$  und die Richtung der Beschleunigung  $a$  um das gleiche Maß  $\Delta\varphi$  ändern.

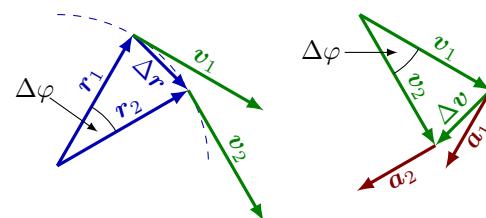


Abbildung 3.11.: Beschleunigung entlang einer Kreisbewegung.

Für die Bestimmung des Betrags der Beschleuni-

gung lassen wir das Zeitintervall  $\Delta t$  gegen null gehen. In einem Zeitintervall  $dt$  legt der Körper die Strecke  $dr = v \cdot dt$  zurück, was einem Winkel von  $d\varphi = \frac{dr}{r}$  entspricht. In derselben Zeit muss sich die Geschwindigkeit um  $dv = v \cdot d\varphi$  quer zu ihrer Richtung ändern. Die Änderung der Geschwindigkeit erfolgt über die Beschleunigung  $a = \frac{dv}{dt}$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v \cdot d\varphi}{dt} = \frac{v \cdot \frac{v \cdot dt}{r}}{dt}$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{für eine Kreisbewegung} \quad (3.5)$$

Beispiel: In einer Schleuder rotiere eine Trommel mit einem Durchmesser von 40 cm ( $r = 20$  cm) um die vertikale Achse mit  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ . Es ergibt sich eine Beschleunigung am äußeren Rand der Trommel von:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi rn)^2}{r} = 4\pi^2 rn^2$$

$$= 4\pi^2 \cdot 20 \text{ cm} \cdot 1500^2 \text{ min}^{-2}$$

$$= 4\pi^2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 25^2 \text{ s}^{-2} = \underline{\underline{4935 \text{ m/s}^2}}$$

Das ist immerhin die 500-fache Erdbeschleunigung! Für 2 kg Wäsche entstehen Kräfte entsprechend der Gewichtskraft von 1 t, was in etwa dem Gewicht eines PKWs entspricht.

### 3.5.3. Beschleunigung in beliebiger Richtung

Was passiert, wenn die Beschleunigung weder parallel noch quer zur Bewegungsrichtung erfolgt? In Abbildung 3.12 wird deutlich, dass sich mit Vektoren dieselbe Gleichung ergibt wie im parallelen und senkrechten Fall. Für eine *konstante Beschleunigung  $\mathbf{a}$*  im Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  gilt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\Delta t$$

Um sich von der Einschränkung der *konstanten* Beschleunigung zu befreien, teilen wir das Intervall  $\Delta t$  in immer kleinere Teile ein, bis sich schließlich ein Integral ergibt, welches die Umkehrung von (3.4) darstellt:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt \quad (3.7)$$

Wird ein Massepunkt mit  $\mathbf{a}_0$  konstant beschleunigt (Betrag und Richtung des Beschleunigungs-Vektors ändern sich nicht), so kann in (3.7) das Integral wieder aufgelöst werden:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}_0 dt = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{v}_0 \quad \text{für } \mathbf{a}_0 \text{ konst.} \quad (3.8)$$

Für das Lösen des unbestimmten Integrals führen wir die Konstante  $\mathbf{v}_0$  ein. Physikalisch entspricht das der Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt null.

Für die Position gilt entsprechend:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt = \frac{\mathbf{a}_0}{2} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad \text{für } \mathbf{a}_0 \text{ konst.} \quad (3.9)$$

Dabei stehen  $\mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{r}_0$  für die Geschwindigkeit und Position zum Zeitpunkt null.

## 3.6. Aufgaben

**Aufgabe 3.1:** Eine Kugel bewegt sich mit  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in Richtung Nordwest und befindet sich zum Zeitpunkt null vier Meter in Richtung Nordost. Wo befindet sich die Kugel nach zwei Sekunden?

**Aufgabe 3.2:** Ausgehend von Position  $(x|y|z) = (1|2|1)$  in Metern bewegt ein Roboter ein Bauteil erst für  $0,2 \text{ s}$  mit Geschwindigkeit  $(v_x|v_y|v_z) = (0|0|2)$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , dann für  $0,5 \text{ s}$  mit Geschwindigkeit  $(2|-2|0)$  und schließlich für  $0,4 \text{ s}$  mit Geschwindigkeit  $(0|0|-1)$ . Wo befindet sich das Bauteil nach dem Bewegungsvorgang?

**Aufgabe 3.3:** Ein Inline-Skater rollt mit  $2,5 \text{ m/s}$  und wird dann für drei Sekunden mit  $1 \text{ m/s}^2$  auf  $5,5 \text{ m/s}$  beschleunigt. In welcher Richtung erfolgte die Beschleunigung relativ zur ursprünglichen Bewegungsrichtung?

**Aufgabe 3.4:** Ein Flugzeug fliegt anfänglich mit einer Geschwindigkeit von  $250 \text{ m/s}$  und wird dann für  $20 \text{ s}$  quer zu seiner anfänglichen Richtung mit  $2 \text{ m/s}^2$  beschleunigt. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs nach der Beschleunigung und um welchen Winkel hat sich die Flugrichtung geändert?

**Aufgabe 3.5:** Sie filmen die Bewegung eines Gegenstandes und untersuchen den zeitlichen Verlauf der Position. Mit  $t$  für die Zeit in Sekunden ermitteln Sie folgende Funktion für die Position des Gegenstandes:

$$\mathbf{r} = f(t) = (3 + 2t + t^2)\mathbf{e}_x + (1 + 1,2t + 0,3t^2)\mathbf{e}_y$$

Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Beschleunigung.

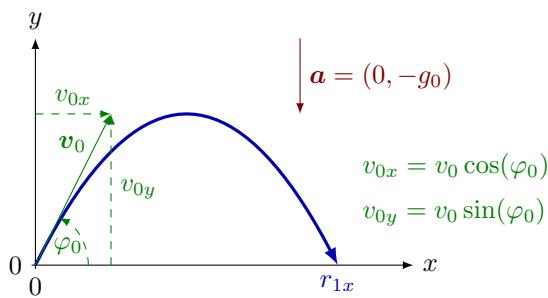
**Aufgabe 3.6:** Ausgehend vom Koordinatenursprung bewegt sich ein Gegenstand mit einer anfänglichen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$  und wird mit  $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_x + 1,5\mathbf{e}_y$  gleichmäßig beschleunigt. a) Wann kreuzt der Gegenstand die  $y$ -Achse? b) Welchen  $y$ -Wert hat der Gegenstand zu diesem Zeitpunkt? c) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor zu diesem Zeitpunkt.

**Aufgabe 3.7:** Partikel bewegen sich ausgehend vom Koordinatenursprung mit  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$  und werden konstant mit  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_y$  beschleunigt. a) Zeigen Sie, dass der Abstand des Partikels zum Koordinatenursprung mit  $d = t \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{4}a^2 t^2}$  gegeben ist. b) Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

### Anwendung 3.1: Schräger Wurf

Frage: Wie weit fliegt ein kleiner schwerer Stein auf der Erdoberfläche (Erdbeschleunigung  $g_0 = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ), der mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  unter einem Winkel von  $\varphi_0$  von der Oberfläche abgeworfen wird?

Da uns die Himmelsrichtung nicht interessiert, betrachten wir das Problem im zweidimensionalen Raum, siehe Abbildung.



Wir haben es mit einer konstanten Beschleunigung zu tun, verwenden daher (3.9) und zerlegen diese in ihre kartesischen Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{r}_y \mathbf{e}_y &= \frac{1}{2} (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y) t^2 + (v_{0x} \mathbf{e}_x + v_{0y} \mathbf{e}_y) t \\ &\quad + r_{0x} \mathbf{e}_x + r_{0y} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_x &= \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + r_{0x} \\ \mathbf{r}_y &= \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + r_{0y} \end{aligned}$$

Wir lassen für unsere Betrachtung den Stein zum Zeitpunkt null am Koordinatenursprung losfliegen, so dass  $\mathbf{r}_0$  den Wert null annimmt. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  wirkt in negativer y-Richtung, so dass  $a_x$  und  $a_y$  entsprechend die Werte null und  $-g_0$  annehmen. Wir suchen die Entfernung  $r_{1x}$  an dem der Stein wieder

die Höhe null annimmt,  $r_{1y} = 0$ . Die beiden letzten Gleichungen können somit umgeschrieben werden zu:

$$r_{1x} = v_{0x} t \quad \text{und} \quad r_{1y} = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_{0y} t = 0$$

Nun lösen wir die zweite Gleichung nach  $t$  auf und erhalten zwei Lösungen, bei der sich der Stein auf der Höhe null befindet:

$$t_0 = 0 \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{2v_{0y}}{g_0}$$

Die erste Lösung ist der Zeitpunkt des Abwurfs, so dass wir uns auf die zweite Lösung konzentrieren und sie in die Gleichung für  $r_{1x}$  einsetzen. Des Weiteren setzen wir für  $v_{0x}$  und  $v_{0y}$  entsprechend die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 \cos(\varphi_0)$  und  $v_0 \sin(\varphi_0)$  ein:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= v_{0x} t_1 = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g_0} = v_0 \cos(\varphi_0) \frac{2v_0 \sin(\varphi_0)}{g_0} \\ &= \frac{2v_0^2}{g_0} \cos(\varphi_0) \sin(\varphi_0) \end{aligned}$$

Mit  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$  folgt schließlich:

$$r_{1x} = \frac{v_0^2}{g_0} \sin(2\varphi_0) \quad (3.6)$$

Beispiel: Ein Athlet wirft einen Speer mit  $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  unter einem Winkel von  $45^\circ$ . Wie weit fliegt der Speer?

$$r_{1x} = \frac{30^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \sin(2 \cdot 45^\circ) \approx 91,7 \text{m}$$

Dies ist natürlich nur eine Abschätzung, da wir jegliche aerodynamischen Effekte vernachlässigt haben.

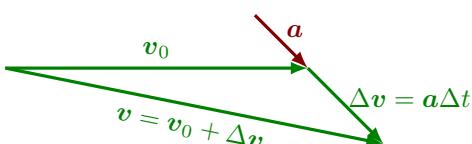


Abbildung 3.12.: Auswirkung einer Beschleunigung in beliebiger Richtung.

**Aufgabe 3.8:** Sie schmeißen einen Apfel horizontal mit  $8 \text{ m/s}$  von einem  $2 \text{ m}$  höher gelegenen Punkt auf eine Ebene. Ihr Freund lässt zur selben Zeit einen Apfel von ebenfalls zwei Metern Höhe senkrecht fallen. a) Welcher Apfel erreicht zuerst den Boden? b) Wie weit fliegt Ihr Apfel bis er den Boden berührt?

**Aufgabe 3.9:** Ein Pfeil wird mit  $40 \text{ m/s}$  horizontal abgeschossen und berührt den Boden in einer Entfernung von  $22 \text{ m}$ . Von welcher Höhe aus wurde der Pfeil

abgeschossen?

**Aufgabe 3.10:** Die Tinte eines Tintenstrahldruckers wird mit  $10 \text{ m/s}$  horizontal auf das  $1 \text{ mm}$  entfernte Papier gespritzt. Wie viel Höhe verliert die Tinte auf diesem Weg?

**Aufgabe 3.11:** Protonen verlieren auf einer Strecke von  $1 \text{ km}$  eine Höhe von  $0,9 \mu\text{m}$ . Wie schnell bewegen sich die Protonen?

**Aufgabe 3.12:** Wie schnell muss ein PKW in einer Kurve mit Radius  $50 \text{ m}$  fahren, damit die radiale Beschleunigung gleich der Erdbeschleunigung ist?

**Aufgabe 3.13:** Ein handelsübliches Sägeblatt hat einen Durchmesser von  $210 \text{ mm}$  und darf mit einer maximalen Geschwindigkeit von  $8000 \text{ Umdrehungen pro Minute}$  betrieben werden. Wie hoch ist die Beschleunigung an den Zähnen des Sägeblatts bei maximaler

Drehzahl? Geben Sie den Wert relativ zur Erdbeschleunigung an.

**Aufgabe 3.14:** Ein Käfer kann auf einer Vinyl-Schallplatte maximal einer seitlichen Beschleunigung von  $0,25 g_0$  standhalten. Bei einer Drehzahl von  $33\frac{1}{3}$  Umdrehungen pro Minute, bis zu welchem Radius kann sich der Käfer noch auf der Schallplatte halten?

**Aufgabe 3.15:** Sie sind in der Lage einen Ball senkrecht 15 m hoch zu werfen. Wie weit können Sie den Ball auf einer horizontalen Ebene werfen unter der Annahme, dass Sie den Ball mit derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abwerfen?

# 4. Newtonsche Axiome

Was hält einen Körper in Bewegung? Diese Frage beschäftigte Wissenschaftler über Jahrtausende. Erst im 17. Jahrhundert erkannte Galileo, dass ein Körper aus sich selbst heraus in Bewegung bleibt. Es bedarf keiner äußeren Einwirkung, um einen Körper in Bewegung zu halten. Die Frage muss von daher nicht lauten: „Was hält einen Körper in Bewegung?“ sondern: „Wie ändert ein Körper seine Bewegung?“

1687 veröffentlichte Sir Isaak Newton sein berühmtes Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, zu deutsch *Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie*. Bis heute sind die dort aufgeführten Grundsätze als die *Newtonischen Axiome* bekannt. Auch wenn in der modernen Physik die von Newton aufgeführten Gesetze Ableitungen tiefergrifender Axiome sind, lassen sich mit ihnen nach wie vor die Grundlagen der Mechanik anschaulich beschreiben.

Bevor wir uns den Newtonschen Axiomen zuwenden, führen wir zunächst die Begriffe *Masse* und *Kraft* ein. Neben den drei bekannten Axiomen wird die *Superposition von Kräften* häufig als das vierte Newtonsche Axiom bezeichnet, auf das wir entsprechend eingehen.

## 4.1. Masse und Kraft

### 4.1.1. Masse

In den vorigen Abschnitten haben wir bereits Körper betrachtet, die in verschiedene Richtungen beschleunigt werden. Dabei wurde Art und Größe des Körpers zunächst außer Acht gelassen. Nun macht es natürlich einen Unterschied, ob eine Münze in die Luft geworfen wird, ein PKW beschleunigt oder ein Planet auf seiner Bahn gehalten wird.

Wir führen hierfür den Begriff der *Masse* ein. Ein Planet hat offensichtlich eine größere Masse als eine Münze. Umgangssprachlich wird der Begriff *Gewicht* verwendet, der aber eher der Schwerkraft auf der Erdoberfläche entspricht. So wiegt ein Astronaut auf dem Mond nur noch etwa ein Sechstel seines Gewichts auf der Erde — nicht, weil er auf dem Weg dorthin auf Diät gehalten wurde, sondern weil die geringere Mond-Beschleunigung die Waage weniger ausschlagen lässt.

Für die Masse wird der Formelbuchstabe  $m$  verwendet. Die Masse wird mit der SI-Einheit Kilogramm, kurz kg gemessen.

$$[m] = \text{kg}$$

Andere Einheiten sind die *Tonne* ( $1\text{t} = 1000\text{kg}$ ) das englische *Pound* ( $1\text{lb} = 0,453\,592\,370\text{kg}$ ), *Stone* ( $1\text{st} = 14\text{lb}$ ), *Ounce* ( $16\text{oz} = 1\text{lb}$ ), die *Feinunze* ( $1\text{oz tr} = 31,103\,476\,8\text{g}$ ) oder das *Karat* ( $1\text{Kt} = 0,2\text{g}$ ).

Die Masse steht im engen Zusammenhang mit dem Begriff *Kraft*.

### 4.1.2. Kraft

Was ist *Kraft*? Als Matthias Steiner 2008 die beachtliche Masse von 258 kg in die Höhe stemmte, stellte er unzweifelhaft unter Beweis, dass er viel *Kraft* hat. Auch kann ein Redner eine *kraftvolle* Stimme haben. Aber was bedeutet Kraft im physikalischen Sinne?

Kräfte begegnen uns in vielfältiger Form: Wir nutzen Kraft zum Schieben, Ziehen oder Anheben. Es werden Kräfte benötigt um einen Gegenstand zu beschleunigen, abzubremsen oder umzulenken. Der Luftwiderstand erzeugt Kräfte und wir benötigen Kraft um Reibung zu überwinden.

Soll ein Körper mit Masse  $m$  mit der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  seine Geschwindigkeit und/oder Richtung ändern, so ist dafür eine Kraft  $\mathbf{F}$  nötig. Da die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ein Vektor ist, liegt es auf der Hand, dass auch die auslösende Kraft  $\mathbf{F}$  ein Vektor ist.

Beobachtungen zeigen, dass der Betrag der benötigten Kraft  $|\mathbf{F}|$  proportional zur beschleunigten Masse  $m$  ist:

$$|\mathbf{F}| \propto m$$

Die nächste Beobachtung ist, dass die Kraft  $\mathbf{F}$  proportional zur Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ist:

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a}$$

Daraus ergibt sich, dass für eine gegebene Kraft  $\mathbf{F}$  das Produkt aus Masse  $m$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}$  konstant ist. Aus diesen Überlegungen wird die Kraft beschrieben mit:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.1)$$

Die Kraft erhält den Formelbuchstaben  $F$  und hat die SI-Einheit *Newton*, kurz N. Ein Newton ist die nötige Kraft, um einen Körper mit einer Masse von  $1\text{kg}$  mit  $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  zu beschleunigen. Damit gilt folgender Zusammenhang:

$$[F] = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

Andere Einheiten sind das *Pond* (Gewichtskraft von einem Gramm auf der Erdoberfläche,  $1\text{p} = 1\text{g} \cdot g_0 = 9,80665\text{mN}$ ), das *Dyn* ( $1\text{dyn} = 10\,\mu\text{N}$ ) und die englische *Pfundkraft* ( $1\text{lbf} = 4,44822\text{N}$ ).

Mit diesen Definitionen für Masse und Kraft befassen wir uns nun mit den Axiomen von Newton.

## 4.2. Erstes Axiom: Trägheitsprinzip

Wird auf einen Körper keine Kraft ausgeübt, so ändert sich weder Betrag noch Richtung seiner Geschwindigkeit. Anders ausgedrückt: Ändert ein Körper seine Be-

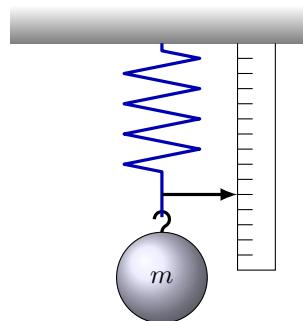
## Anwendung 4.1: Bestimmung von Massen mittels Erdbeschleunigung

Wie kann die Masse eines Körpers bestimmt werden? Die Masse ist zunächst eine abstrakte Größe, die durch die äußere Form nicht ermittelt werden kann. Die Lösung liegt in der benötigten Kraft, um den Körper zu beschleunigen. Selbst im Weltall in der Schwerelosigkeit kann z.B. durch Schütteln einer Milchflasche festgestellt werden, ob noch Milch vorhanden ist, oder ob der Kollege die leere Flasche wieder in den Kühlschrank gestellt hat.

Auf der Erdoberfläche machen wir uns die Erdbeschleunigung zu Nutzen: Ein Körper mit unbekannter Masse wird mit  $g_0 = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  beschleunigt. Daraus ergibt sich eine nach unten (Richtung Erdmitte) gerichtete Kraft, die auf den Körper wirkt, die *Erdanziehungskraft*. Damit der Körper nicht ins „bodenlose“ fällt, muss die Erdanziehungskraft durch eine gleichgroße, um  $180^\circ$  gedrehte Kraft kompensiert werden, z.B. indem der Körper auf einen Tisch gelegt oder in der Hand festgehalten wird.

Wird der unbekannte Körper an einer Feder aufgehängt, so ändert die Feder je nach angewandter Kraft ihre Länge. Einmal mit Körpern bekannter Massen abgeglichen entsteht auf diese Weise eine

Waage.



Natürlich hat eine solche Waage eine wesentliche Einschränkung: Sie funktioniert nur bei der Erdbeschleunigung, für die sie abgeglichen wurde. So sind bereits auf hohen Bergen größere Abweichungen zu beobachten. Erst recht auf dem Mond zeigt eine solche Waage gänzlich falsche Werte an. Da aber die meisten Waagen zum einen auf der Erde und zum anderen im Bereich 0 bis 1000 Meter über Normalnull verwendet werden, sind diese Art von Waagen weit verbreitet und erfüllen im täglichen Leben ihre Aufgabe.

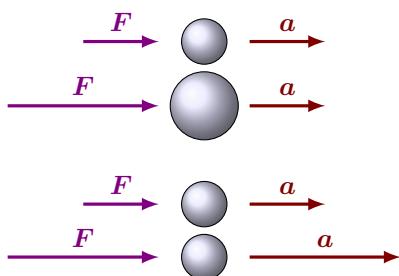


Abbildung 4.1.: Wird ein Körper beschleunigt, so ist die Kraft proportional zur Masse und zur Beschleunigung.

wegungsrichtung oder Geschwindigkeit, so muss eine Kraft auf ihn eingewirkt haben.

Der Begriff *Trägheit* beschreibt den Widerstand eines Körpers seine Geschwindigkeit oder Bewegungsrichtung zu ändern.

Dieses Naturgesetz wurde bereits knapp 50 Jahre vor Newton von Galileo Galilei formuliert. Seine Beobachtungen sind in Abbildung 4.2 dargestellt: a) Rollt eine Kugel durch eine Mulde, so erreicht sie auf der anderen Seite annähernd die gleiche Höhe wie zuvor. b) Der gleiche Effekt stellt sich ein, wenn die Mulde breiter ausgelegt wird. Das heißt, die Kugel kann mit der gleichen Energie wie zuvor eine längere Strecke zurücklegen. c) Galileo schloss daraus: Wird eine rollende Kugel nicht gehindert, so bewegt sie sich immer weiter.

Beispiel: Solange sich einer Billardkugel nichts in den Weg stellt, rollt sie ungehindert geradeaus weiter. Ändert sie dagegen ihre Richtung oder Geschwindig-

keit, so muss eine Kraft auf sie gewirkt haben.

Beachtenswert dabei ist, dass für die Aufrechterhaltung einer Bewegung keine Kraft benötigt wird. Das widerspricht unseren Erfahrungswerten — schließlich wird bei einer Autofahrt zwischen Hamburg und München doch reichlich Benzin verbraucht. Das hat natürlich mit dem Luftwiderstand und den Reibungsverlusten innerhalb des PKWs zu tun. Mehr dazu beim dritten Axiom.

## 4.3. Zweites Axiom: Aktionsprinzip

Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist in Betrag und Richtung proportional der effektiv einwirkenden Kraft.

Wer die Unterlagen zur Vorlesung bis hierher verfolgt hat, den sollte dieser Satz nicht überraschen. Die Beschleunigung entspricht der Änderung der Geschwindigkeit  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Die Kraft wiederum entspricht dem Produkt aus Masse und Beschleunigung  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , siehe (4.1).

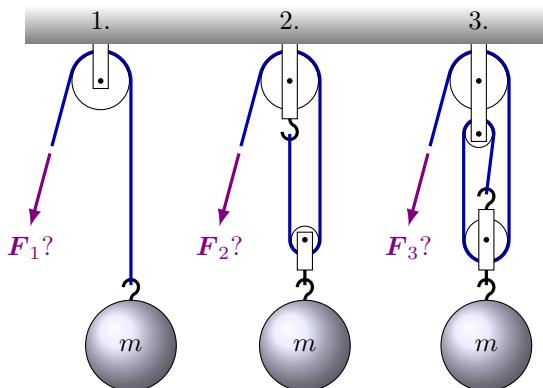
Das Axiom geht noch nicht auf die Masse ein. Es stellt nur fest, dass Kraft und Geschwindigkeitsänderung proportional zueinander sind:

$$\mathbf{F} \propto \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Beispiel: Soll ein PKW für die Beschleunigung von null auf 100 km/h statt 20 nur 10 Sekunden benötigen, so muss die doppelte Kraft für die Beschleunigung aufgewendet werden.

## Anwendung 4.2: Flaschenzüge

In der folgenden Abbildung sind drei unterschiedliche Flaschenzüge dargestellt. An allen drei Flaschenzügen hängt die gleiche Masse  $m$ . Frage: Wie viel Kraft wird benötigt, um die Masse  $m$  anzuheben?



Zunächst betrachten wir die Funktionsweise eines Seils über einer idealen Rolle. (*Ideal* heißt, das Drehen der Rolle geschieht ohne Reibung und bedarf keiner eigenen Kraft.) Die Rolle sorgt dafür, dass ein über sie gespanntes Seil auf beiden Seiten mit gleicher Kraft gespannt wird. Wird an einem Ende des Seils gezogen, so dreht sich die Rolle, bis auf beiden Seiten wieder die gleiche Kraft herrscht. Die Rolle ändert die Richtung der Kraft, aber nicht dessen Betrag.

Beim ersten der drei Flaschenzüge wird nur eine Rolle verwendet, die fest an der Decke montiert ist. Der Effekt ist, dass die benötigte Kraft zum heben der Masse  $mg_0$  über die Rolle 1:1 umgelenkt wird. Das heißt, zum Heben der Masse  $m$  muss mit der gleichen Kraft  $mg_0$  am Seil gezogen werden:

$$F_1 = mg_0$$

Beim zweiten Flaschenzug ist auf der Seite der Masse eine zweite Rolle angebracht, so dass es jetzt zwei Seilverbindungen zwischen Masse und Decke gibt. Die Folge ist, dass die Schwerkraft der Masse  $mg_0$  auf zwei Seile aufgeteilt wird. Die Rollen sorgen dafür, dass diese halbe Kraft auf das Seilende übertragen wird. Das heißt, zum Heben der Masse  $m$  muss mit der halben Kraft  $\frac{1}{2}mg_0$  am Seil gezogen werden:

$$F_2 = \frac{1}{2}mg_0$$

Beim dritten Flaschenzug gibt es drei Seilverbindungen zwischen Masse und Decke, so dass nur mit einem Drittel der Schwerkraft  $\frac{1}{3}mg_0$  gezogen werden muss:

$$F_3 = \frac{1}{3}mg_0$$

Neben diesen einfachen Flaschenzügen gibt andere Varianten: Bei *Tandem*-Flaschenzügen wird das freie Ende des Seils durch einen zweiten Flaschenzug gezogen. Bei *Differential*-Flaschenzügen sind zwei Rollen unterschiedlichen Durchmessers gekoppelt, so dass mit der Differenz von Kräften gearbeitet werden kann.

Für alle Flaschenzüge gilt, je weiter die benötigte Kraft reduziert wird, desto mehr Seillänge muss gezogen werden, um die Masse auf eine bestimmte Höhe anzuheben. Diese Erkenntnis ist später für den Begriff der Arbeit wichtig.

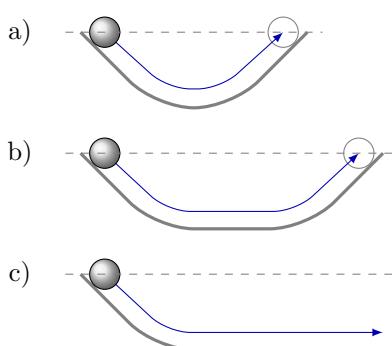


Abbildung 4.2.: Eine Kugel kann mit der gleichen Energie unterschiedliche Strecken zurücklegen.

Eingangs stellten wir die Frage: „Wie ändert ein Körper seine Bewegung?“ — Antwort: Indem Kraft auf ihn ausgeübt wird. Erst wenn eine effektive Kraft auf einen Körper ausgeübt wird, ändert dieser seine Geschwindigkeit in Betrag und/oder Richtung.

### 4.3.1. Beschleunigungskraft parallel zur Bewegung

Wird auf einen Körper entlang seiner Bewegungsrichtung eine Kraft ausgeübt, so ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit, die Richtung bleibt konstant. (Ausnahme ist, wenn der Körper seine Richtung umkehrt.)

Soll ein PKW mit Masse 1 000 kg in 10 Sekunden von null auf 72 km/h (=20 m/s) beschleunigt werden, so ist für die Beschleunigung von  $a = 2 \text{ m/s}^2$  eine Kraft von  $F = ma = 2000 \text{ N}$  nötig. Das schließt natürlich alle Reibungsverluste noch nicht mit ein.

Die *Gewichtskraft* ist die Kraft, die auf einen Körper aufgrund der Erdbeschleunigung ausgeübt wird. Jeder Körper mit Masse  $m$  wird auf der Erdoberfläche mit der Kraft  $F = mg_0$  in Richtung Erdmittelpunkt angezogen. Das heißt, jedes Kilogramm Masse wird mit

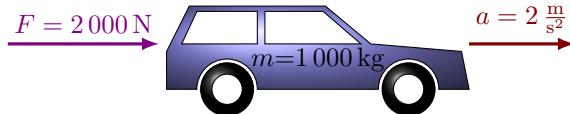


Abbildung 4.3.: Kraft beim Beschleunigen eines PKWs.

knapp zehn Newton nach unten gezogen, siehe Abbildung 4.4.

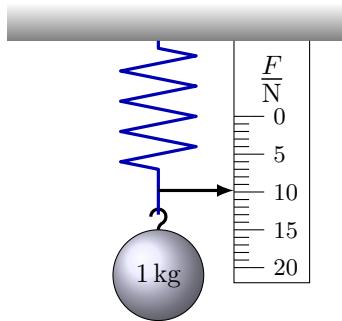


Abbildung 4.4.: Gewichtskraft für 1 kg Masse.

Auf diese Weise können Sie leicht ein *Gefühl* für die Einheit *Newton* bekommen. Halten Sie ein Kilogramm Kartoffeln in der Hand, so üben diese eine Gewichtskraft von knapp 10 N auf Ihre Hand aus. Eine 100 g Tafel Schokolade übt dagegen eine Gewichtskraft von ca. 1 N aus. Kräfte im Bereich 100 bis 1000 N können ohne weiteres mit Muskelkraft erzeugt werden. Matthias Steiner (siehe Abschnitt 4.1.2) musste beim Stemmen der 258 kg einer Gewichtskraft von 2531 N standhalten!

### 4.3.2. Beschleunigungskraft quer zur Bewegung

Wir haben bereits gesehen, dass eine konstante Beschleunigung quer zur Bewegungsrichtung zu einer Kreisbewegung führt. Wie groß ist die Kraft, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten?

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$ , so haben wir bereits gesehen, dass die radiale Beschleunigung mit  $a = \frac{v^2}{r}$  gegeben ist. Hat der Körper die Masse  $m$ , so folgt:

$$F = \frac{m v^2}{r}$$

Wir führen den Begriff *Winkelgeschwindigkeit* ein, und vergeben das Formelzeichen  $\omega$ . Sie wird gemessen in Bogenmaß pro Zeit. Da das Bogenmaß nur eine Hilfseinheit ist schreiben wir:

$$[\omega] = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit gibt an, welchen Winkel (gemessen in Bogenmaß) ein Körper um seinen Drehpunkt pro Zeit zurücklegt. Die Geschwindigkeit  $v$  ist das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Radius  $r$ :

$$v = \omega r$$

Für die Kraft, mit der ein rotierender Körper beschleunigt werden muss, folgt:

$$F = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r \quad \text{für gleichm. Rotation} \quad (4.2)$$

Beispiel: Bei einem Computertomographen (CT) sei die Röntgenröhre mit einer Masse von  $m = 50 \text{ kg}$  auf einem Radius  $r = 60 \text{ cm}$  vom Mittelpunkt auf der Gantry montiert, die sich mit  $n = 3$  Rotationen pro Sekunde dreht. Zusätzlich zur Gewichtskraft müssen die Schrauben, welche die Röntgenröhre halten, folgender Kraft standhalten:

$$\begin{aligned} F &= m \omega^2 r = m(2\pi n)^2 r \\ &= 50 \text{ kg} \cdot (2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,6 \text{ m} = 10660 \text{ N} \end{aligned}$$

Das entspricht einer Beschleunigung von:

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 r = (2\pi n)^2 r = (2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,6 \text{ m} \\ &= 213 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 22 g_0 \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Schrauben müssen gut das zwanzigfache der Gewichtskraft zusätzlich halten! Die Schrauben für die Röntgenröhre müssen so ausgelegt sein, dass sie unter Erdbeschleunigung ein Gewicht von gut 1,1 t halten können!

## 4.4. Drittes Axiom: Reaktionsprinzip

Wirkt auf einen Körper eine Kraft (*actio*), so wirkt ihr eine gleichgroße, um  $180^\circ$  gedrehte Kraft entgegen (*reactio*). Die Summe der Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{actio}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{reactio}}$  ist null:

$$\mathbf{F}_{\text{actio}} + \mathbf{F}_{\text{reactio}} = 0$$

Im Folgenden betrachten wir die Auswirkungen dieses Sachverhalts auf verschiedene Bereiche:

### 4.4.1. Bewegung auf einer Geraden

Wird ein Körper entlang einer Geraden beschleunigt, so muss eine Beschleunigungskraft  $\mathbf{F}_B = m\mathbf{a}$  auf den Körper einwirken. Gleichzeitig möchte der Körper in seiner gleichförmigen Bewegung verharren und wirkt mit einer *Trägheitskraft*  $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}$  der Beschleunigungskraft entgegen. Die Summe beider Kräfte ist null:  $\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_T = 0$ . Die beiden Kraftvektoren haben den gleichen Betrag, zeigen aber in entgegengesetzte Richtungen. In Abbildung 4.5 ist dies anhand eines PKWs gezeigt.

Ein anderes Beispiel: Wenn Sie in einem Flugzeug sitzen, welches gerade auf der Startbahn beschleunigt, so werden Sie einerseits durch eine Kraft  $\mathbf{F}_B$  von hinten beschleunigt, andererseits sorgt ihre Trägheitskraft  $\mathbf{F}_T$  dafür, dass Sie in den Sitz gedrückt werden.

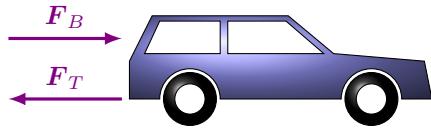


Abbildung 4.5.: Kräfte bei der Beschleunigung eines PKWs.

#### 4.4.2. Bewegung auf einer Kreisbahn

Um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, muss er mit einer konstanten Kraft Richtung Zentrum des Kreises beschleunigt werden, siehe Abschnitt 4.3.2. Diese Kraft wird *Zentripetalkraft* genannt.

Dem entgegen wirkt die Trägheit des Körpers, der sich ohne äußere Einwirkung auf einer geraden Bahn bewegen würde. Es entsteht eine Trägheitskraft mit konstantem Betrag, die vom Zentrum des Kreises weg zeigt. Diese Kraft wird *Zentrifugalkraft* oder auch *Fliehkraft* genannt.

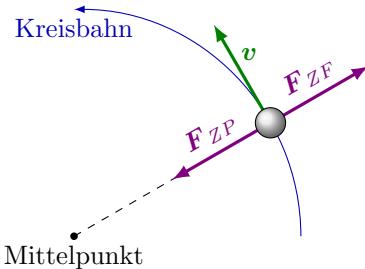


Abbildung 4.6.: Bei einer Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit wirken Zentripetalkraft  $\mathbf{F}_{ZP}$  und Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}_{ZF}$  einander entgegen.

Die Beträge von Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft müssen nicht immer gleich sein. Wenn Sie in einem PKW entlang einer Kurve fahren, so wirken auf Ihren Körper wieder zu gleichen Teilen Zentripetal- und Zentrifugalkraft: Die Zentrifugalkraft drückt Ihren Körper nach außen, während über die Sitzfläche, den Sicherheitsgurt und Ihre Hände am Lenkrad die Zentripetalkraft dem zu gleichen Teilen entgegen wirkt. Anders Ihr Handy auf dem Beifahrersitz, dass in der Kurve nach außen rutscht: Hier führt ein Ungleichgewicht zwischen Zentripetal- und Zentrifugalkraft zu einer Bewegung des Handys relativ zur Bewegung des PKWs.

Sind Zentripetal- und Zentrifugalkraft nicht gleich, so sind weitere Kräfte im Spiel, die in Summe wieder null ergeben. Dazu im folgenden Abschnitt mehr.

### 4.5. Superposition der Kräfte

Das dritte Newtonsche Axiom mit seinen zwei Kräften  $\mathbf{F}_{\text{actio}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{reactio}}$  kann auf beliebig viele Kräfte erweitert werden: Die Summe aller Kräfte ist null.

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (4.3)$$

Beispiel: Wird ein PKW beschleunigt, so wirken die Antriebskraft  $\mathbf{F}_A$ , der Luftwiderstand  $\mathbf{F}_L$ , die Trägheitskraft der Masse  $\mathbf{F}_T$  und die Reibungsverluste innerhalb des Fahrzeugs  $\mathbf{F}_R$ . Die Summe dieser vier Kräfte ergibt null, siehe Abbildung 4.7.

Beim Abbremsen verteilen sich die Kräfte etwas anders. Der Luftwiderstand  $\mathbf{F}_L$  und die Reibung  $\mathbf{F}_R$  behalten ihre Richtung bei, während die Trägheit  $\mathbf{F}_T$  und der Antrieb  $\mathbf{F}_A$  jeweils ihre Richtung umkehren, siehe Abbildung 4.8.

In beiden Fällen ist die Summe aller Kräfte null:

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_A = 0$$

Das Superpositionsprinzip der Kräfte gilt natürlich auch im zweidimensionalen Raum. So wird die Bewegungsrichtung eines Flugzeugs zusätzlich von der Schwerkraft, der Auftriebskraft, und ggf. durch seitliche Kräfte von Seitenwinden beeinflusst.

### 4.6. Reibung

Reibung entsteht zwischen einem bewegten Körper und seiner Umgebung. Wir unterscheiden verschiedene Arten von Reibung:

**Gleitreibung  $\mu$ .** Die Reibung zwischen zwei Flächen in der Bewegung. Ein Körper bewegt sich auf einer Fläche und verursacht dabei Reibung, siehe Abbildung 4.9. Die Reibungskraft  $\mathbf{F}_R$  hängt von der Beschaffenheit der Oberflächen und der Kraft senkrecht auf die Fläche ab. Sie ist unabhängig von Geschwindigkeit und Größe der Fläche.

**Hafreibung  $\mu_0$ .** Die Reibung zwischen zwei Flächen im Stillstand. Soll ein sich in Ruhe befindender Körper in Bewegung gesetzt werden, so ist dafür aufgrund der Hafreibung zunächst eine höhere Kraft nötig. Die Reibungskraft  $\mathbf{F}_{R0}$  hängt von der Beschaffenheit der Oberflächen und der Kraft senkrecht auf die Fläche ab. Sie ist unabhängig von der Größe der Fläche.

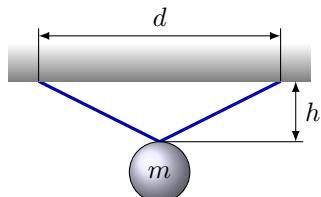
**Rollreibung.** Die Reibung von Reifen auf der Oberfläche. Neben der Gleitreibung in den Lagern entstehen bei einem Rad Verluste auf der Rollfläche, siehe Abbildung 4.10. Wir wollen das Thema hier nicht weiter vertiefen.

**Reibung in Fluiden.** Die Reibung von bewegten Objekten in Flüssigkeiten oder Gasen. Vor dem Objekt muss das Fluid verdrängt werden; es entsteht ein höherer Druck, welcher das Objekt abbremst. Hinter dem Objekt fließt das Fluid wieder zusammen; es entsteht eine geringerer Druck, der das Objekt ebenfalls abbremst.

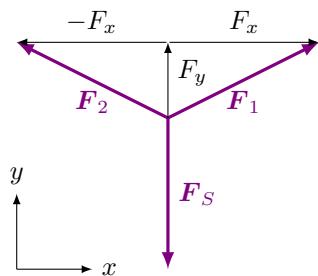
Wir unterscheiden turbulenten Fluss (mit Verwirbelung) von laminaren Fluss (ohne Verwirbelung). Dazwischen gibt es einen Übergangsbereich. Auch die Reibung in Fluiden wollen wir hier nicht weiter vertiefen.

### Anwendung 4.3: Belastung von Seilen

Ein Gegenstand der Masse  $m$  soll mittig an zwei Seilen an der Decke eines Wohnraumes montiert werden. Der Abstand zur Decke sei  $h$  und der Abstand zwischen den Seilenden an der Zimmerdecke sei  $d$ , siehe Abbildung. Frage: Welche Kraft müssen die beiden Seile aushalten?



Zunächst erstellen wir das Zeigerdiagramm der Kräfte:



Wir erinnern uns, dass die Summe aller Kräfte null ist, und zerlegen die Kräfte in ihre Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_S &= 0 \\ F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y - F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y - mg_0 \mathbf{e}_y &= 0 \\ 2F_y \mathbf{e}_y &= mg_0 \mathbf{e}_y \\ F_y &= \frac{mg_0}{2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis besagt, dass sich die Schwerkraft auf die vertikale Komponente der beiden Seile aufteilt.

Um die Belastung der Seile zu bestimmen, müssen wir den Betrag der Vektoren  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  ermitteln. Wir vergegenwärtigen uns, dass das Kräftedreieck mit den Kanten  $F_1$ ,  $F_x$  und  $F_y$  das gleiche Seitenverhältnis wie das Dreieck mit den Kanten  $l$ ,  $d/2$  und  $h$  hat, wobei  $l$  für die Länge eines Seils steht. Dadurch können wir die Kraft eines Seils durch das Verhältnis der Kanten ermitteln:

$$\begin{aligned} F_1 &= |\mathbf{F}_1| = F_y \frac{l}{h} \\ &= \frac{mg_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2}}{h} \\ &= \frac{mg_0}{2} \sqrt{1 + \frac{d^2}{4h^2}} \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Seile mindestens mit der halben Schwerkraft belastet werden. Je weiter die Seile auseinander montiert werden, desto mehr werden die Seile belastet.

Beispiel 1: Ein Gewicht von 10 kg wird an zwei Seilen mit 2 m Abstand zueinander und 1 m unterhalb der Decke montiert. Es folgt für die Belastung der Seile:

$$F_1 = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{2^2 \text{ m}^2}{4 \cdot 1^2 \text{ m}^2}} = \underline{\underline{77,6 \text{ N}}}$$

Beispiel 2: Wir betrachten die gleiche Anordnung wie in Beispiel 1, nur das der Abstand zur Decke nur noch 10 cm beträgt:

$$F_1 = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{2^2 \text{ m}^2}{4 \cdot 0,1^2 \text{ m}^2}} = \underline{\underline{492,9 \text{ N}}}$$

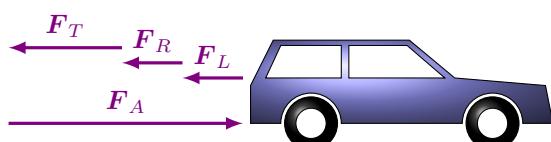


Abbildung 4.7.: Summe der Kräfte beim Beschleunigen eines PKWs.

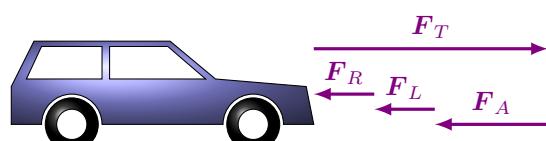


Abbildung 4.8.: Summe der Kräfte beim Abbremsen eines PKWs.

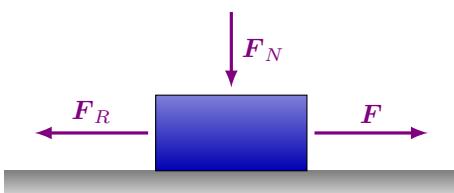


Abbildung 4.9.: Reibung zwischen zwei Körpern

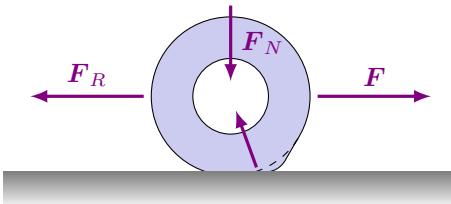


Abbildung 4.10.: Rollreibung

Viele Anwendungen erfordern eine geringe Reibung. Beispiele sind die Haftreibung beim Anziehen eines Fahrzeugs, Gleitreibung in Lagern von Motoren, Rollreibung in Rädern oder der Luftwiderstand eines Flugzeugs. In anderen Situationen sind wir an hohen Reibungen interessiert. So soll die Haftreibung eines Reifens auf der Fahrbahn möglichst hoch sein, damit beim Bremsen eine hohe Wirkung erzielt wird.

#### 4.6.1. Reibungskoeffizienten

Wird ein Körper mit der Kraft  $F_N$  normal (senkrecht) auf die Reibungsfläche gedrückt, so muss eine Kraft  $F_R$  überwunden werden, um den Körper in Bewegung zu setzen (Haftreibung) oder in Bewegung zu halten (Gleitreibung). Das Verhältnis zwischen Reibungskraft  $F_R$  und Normalkraft  $F_N$  ist der *Reibungskoeffizient*, siehe Abbildung 4.11.

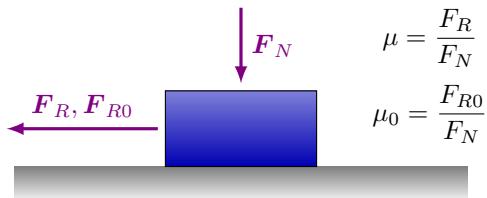


Abbildung 4.11.: Definition der Reibungskoeffizienten.

Dabei stehen *Gleitreibungskoeffizient*  $\mu$  und *Haftreibungskoeffizient*  $\mu_0$  entsprechend für Gleitreibung und Haftreibung.

**Beispiel:** Sie wollen eine Holzkiste mit 50 kg Masse über einen Steinfußboden ziehen ( $\mu = 0,3$ ;  $\mu_0 = 0,7$ ). Welche Kraft ist nötig? Antwort: Die Normalkraft beträgt  $F_N = mg = 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490,5 \text{ N}$ . Um die Kiste in Bewegung zu setzen wird die Kraft  $F_{R0} = \mu_0 F_N = 0,7 \cdot 490,5 \text{ N} = 343,35 \text{ N}$  benötigt. Die Kraft, um die Kiste in Bewegung zu halten, beträgt  $F_R = \mu F_N = 0,3 \cdot 490,5 \text{ N} = 147,15 \text{ N}$ .

#### 4.6.2. Bestimmung der Koeffizienten

Wie bestimmen wir die Reibungskoeffizienten? Wir wenden die Methode der schrägen Ebene an:

Für die Haftreibung bestimmen wir den Winkel  $\alpha_0$  bei dem die Kiste gerade anfängt zu rutschen bzw. gerade noch nicht anfängt zu rutschen. Für die Gleitreibung bestimmen wir den Winkel  $\alpha$ , bei dem die Kiste

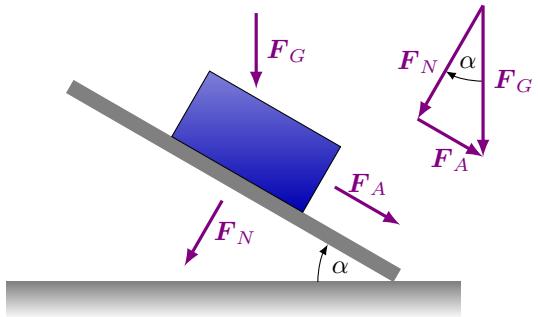


Abbildung 4.12.: Definition der Reibungskoeffizienten.

gerade noch weiter rutscht bzw. grade aufhört zu rutschen. Für die Koeffizienten folgt:

$$\mu_0 = \frac{F_{A0}}{F_{N0}} = \frac{F_G \sin(\alpha_0)}{F_G \cos(\alpha_0)} = \tan(\alpha_0) \quad (4.4)$$

$$\mu = \frac{F_A}{F_N} = \frac{F_G \sin(\alpha)}{F_G \cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad (4.5)$$

D.h. zur Bestimmung des Haftreibungskoeffizienten ermitteln wir den Tangens des Winkels, bei dem der Gegenstand gerade anfängt zu rutschen bzw. gerade noch nicht anfängt zu rutschen.

Entsprechend bestimmen wir für den Gleitreibungskoeffizienten den Winkel, bei dem das Objekt gerade aufhört zu rutschen bzw. gerade noch nicht aufhört zu rutschen.

**Beispiel:** Ein Holzklotz fängt auf einer Holzebene unter einem Winkel von  $45^\circ$  gerade an zu rutschen. Es ergibt sich ein Haftreibungskoeffizient von  $\mu_0 = \tan(45^\circ) = 1$

### 4.7. Aufgaben

**Aufgabe 4.1:** Ein Engländer verrät Ihnen sein Körpergewicht mit 11 st und 9 lb und seine Körpergröße mit 5 ft und  $10\frac{1}{2}$  in. Welchen Body-Mass-Index hat der Engländer? Hinweis: Der Body-Mass-Index ist das Körpergewicht in kg geteilt durch das Quotienten der Körpergröße in Metern (1 ft = 12 in = 30,48 cm).

**Aufgabe 4.2:** Ein PKW mit einem Gewicht von 1,1 t (inkl. Fahrer) soll in 5 s von null auf 36 km/h beschleunigt werden. Welche mittlere Kraft ist dafür nötig? (Reibungsverluste können vernachlässigt werden.)

**Aufgabe 4.3:** Ein Astronaut schüttelt eine Butterdose (Eigengewicht der Dose 100 g) und stellt fest, dass er für eine Beschleunigung von  $4 \text{ m/s}^2$  eine Kraft von 1 N benötigt. Wie viel Butter ist noch in der Dose?

**Aufgabe 4.4:** Die Klingen eines Rasenmähers nach dem Sichelprinzip (rotierende Klingen) sind mit einem Abstand 20 cm von der Drehachse montiert und wiegen je 50 g. Berechnen sie Zentrifugal- und Zentripetalkraft an den Klingen für eine Drehzahl von 3 600 Umdrehungen pro Minute.

**Aufgabe 4.5:** Eine Metallkugel rotiere an einem 1 m langen Faden mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $10 \text{ s}^{-1}$  wobei der Faden mit 100 N belastet wird. Wie schwer ist die Metallkugel?

**Aufgabe 4.6:** Sie schieben auf ebener Fläche einen PKW und benötigen 12 s um den Wagen von null auf 1,4 m/s zu beschleunigen. Wie schnell rollt der Wagen, wenn Sie zusammen mit einer ähnlich starken Person den Wagen für 6 s anschieben?

**Aufgabe 4.7:** Ein kleiner Baum wird an drei Seilen mit den Kräften 50, 80 und 100 N in die entsprechenden Richtungen  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $-120^\circ$  gehalten. In welche Richtung und mit welcher Kraft wird der Baum in Summe gezogen?

**Aufgabe 4.8:** Ein großes Frachtschiff werde von zwei Schleppern die Elbe hochgezogen. Der kleinere Schlepper ziehe den Frachter mit einer Kraft  $\mathbf{F}_1$  unter einem Winkel  $\varphi_1$  relativ zur Bewegungsrichtung  $\mathbf{v}$ . Der zweite Schlepper ziehe den Frachter auf der anderen Seite mit einer Kraft  $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{F}_1$ . Unter welchem Winkel  $\varphi_2$  relativ zur Bewegungsrichtung muss der zweite Schlepper den Frachter ziehen, damit dieser seine Richtung nicht ändert?

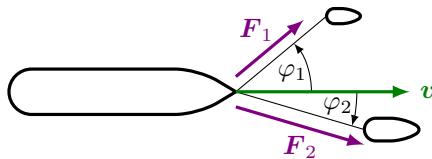


Abbildung 4.13.: Winkel beim Ziehen eines Schiffes.

**Aufgabe 4.9:** Ein Fahrzeug wiege 1 t und habe die Reibungszahlen  $\mu_0 = 0,15$  und  $\mu = 0,1$ . Bestimmen Sie a) die Kraft, um das Fahrzeug horizontal in Bewegung zu setzen und b) um es in Bewegung zu halten.

**Aufgabe 4.10:** Sie untersuchen die Reibung von Stahl auf Stahl ohne Schmierstoff. Sie lassen hierfür einen Stahlklotz auf einer schrägen Stahlebene rutschen. Der Klotz beginnt ab einem Winkel  $9^\circ$  zu rutschen (horizontal =  $0^\circ$ ). Ab einem Winkel von  $7^\circ$  hört er wieder auf zu rutschen. Bestimmen Sie die Reibungskoeffizienten.

# 5. Arbeit, Energie und Leistung

## 5.1. Arbeit $W$

Wie können wir den Begriff *Arbeit* definieren? Kraft alleine ist noch keine Arbeit. Wenn ein stämmiger Mann mit viel Kraft eine Stunde gegen eine Hauswand drückt, so hat er noch keine Arbeit verrichtet. Erst wenn eine Kraft mit einer Wegstrecke kombiniert wird, ist *mechanische Arbeit* verrichtet worden. Mechanische Arbeit ist das Produkt aus Kraft und Strecke. Die Größe *Arbeit* ist ein Skalar, es wird das Formelzeichen  $W$  vergeben, und sie wird in *Joule*, kurz J gemessen:

$$[W] = \text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Beim Thema Flaschenzüge haben wir bereits gesehen, wie durch geschickte Anordnung von Rollen und Seilen die benötigte Kraft zum Heben einer Masse verändert werden kann. Soll eine gegebene Masse  $m$  um die Höhe  $h$  angehoben werden, so zeigen Beobachtungen, dass im gleichen Maße wie die benötigte Kraft abnimmt die Länge des Seils, die gezogen werden muss, zunimmt. Für alle Flaschenzüge ist das Produkt aus Seillänge  $l$  und benötigter Kraft  $F$  konstant:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 = F_3 l_3 = mg_0 h$$

Wir definieren die Arbeit  $W$  als das Produkt einer Kraft  $F$ , die entlang einer Strecke  $\Delta r$  angewendet wird.

$$W = F \Delta r \quad \text{für } F, \Delta r = \text{konst. und } \varphi = 0 \quad (5.1)$$

$\varphi$  ist der Winkel zwischen den Richtungen von Kraft  $F$  und Verschiebung  $\Delta r$ .

Zwei Aspekte müssen für eine allgemeine Definition noch berücksichtigt werden: Erstens, der Winkel zwischen Richtung der Kraft und Richtung der Bewegung. Zweitens, die Veränderung der Kraft entlang der Strecke.

### 5.1.1. Winkel zwischen Kraft und Bewegung

Die Richtungen von Kraft und Bewegung müssen nicht auf einer Geraden liegen. Beispiel sei ein Koffer, der an einem Riemen gezogen wird. Da der Koffer kleiner als die typische Höhe der Hand eines Menschen ist, wird der Riemen schräg nach oben gezogen. Es ergibt sich ein Winkel  $\varphi$  zwischen der angreifenden Kraft  $F$  und der Bewegung  $v$ , siehe Abbildung 5.1.

Wird der Riemen senkrecht nach oben gezogen, so bewegt sich der Koffer nicht (außer dass er bei genügend Kraft angehoben wird). Je kleiner der Winkel zwischen den Richtungen für Kraft und Bewegung ist,

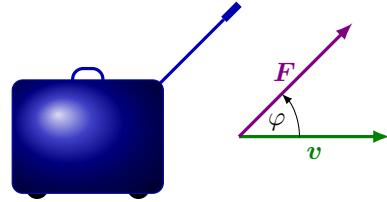


Abbildung 5.1.: Zum Ziehen des Koffers setzt die Kraft  $F$  unter einem Winkel  $\varphi$  zur Bewegung  $v$  an.

desto besser wird die Kraft in Bewegung des Koffers umgesetzt. Dieses Verhalten wird durch das Skalarprodukt von Vektoren ausgedrückt:

$$\begin{aligned} W &= |\mathbf{F}| |\Delta \mathbf{r}| \cos(\mathbf{F}, \Delta \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{F} \Delta \mathbf{r} \quad \text{für } \mathbf{F} = \text{konst.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wird auf einen Körper quer zu seiner Bewegungsrichtung eine Kraft ausgeübt, so wird ggf. seine Richtung geändert, aber es wird keine Arbeit geleistet. Bei einer Rakete, die durch Seitentriebwerke gelenkt wird, erscheint dies zunächst nicht offensichtlich. Deutlicher wird dies bei einem gelenkten Körper wie einem PKW oder einem Zug: Um die Richtung des Fahrzeugs zu ändern muss nur das Lenkrad betätigt werden bzw. der Zug rollt auf den gekrümmten Gleisen. In beiden Fällen wird keine Arbeit verrichtet.

### 5.1.2. Änderung der Kraft entlang der Strecke

Bisher haben wir stillschweigend angenommen, dass auf den betrachteten Körper eine konstante Kraft angreift. Des Weiteren sind wir davon ausgegangen, dass sich der Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Bewegung nicht ändert. Beides sind Annahmen, die nur unter speziellen Bedingungen gelten. Wir stellen uns die Frage, wie die bisherige Gleichung für die Arbeit verallgemeinert werden kann.

Abbildung 5.2 stellt die Bahn eines Körpers dar, auf den im Laufe der Bahn unterschiedliche Kräfte angreifen. Um die geleistete Arbeit zu bestimmen, können wir zunächst die zurückgelegte Strecke  $s$  in kleine Intervalle  $\Delta \mathbf{r}$  einteilen. Für jedes Intervall bestimmen wir das Skalarprodukt  $\mathbf{F} \Delta \mathbf{r}$  und addieren diese auf, siehe Abbildung 5.3.

$$W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i$$

In Abbildung 5.3 steht  $F_{\text{eff}}$  für die effektiv zur Arbeit beitragende Kraft:

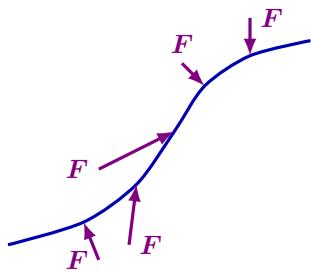


Abbildung 5.2.: Kraft und Weg können sich in einem betrachteten Intervall beliebig ändern.

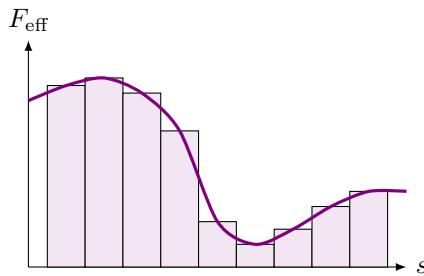


Abbildung 5.3.: Das Produkt von Kraft und Weg in mehreren Intervallen.

$$F_{\text{eff}} = \mathbf{F} \frac{\Delta r}{\Delta t} = F \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{r})$$

Wenn wir die Intervalle  $\Delta r$  immer kleiner werden lassen, nähern wir uns dem (Riemannschen) Linienintegral, mit dem wir die Arbeit allgemein definieren:

$$W = \int \mathbf{F} dr \quad (5.3)$$

## 5.2. Energie $E$

*Energie* ist die Möglichkeit Arbeit zu verrichten. Im engeren Sinne dieses Kapitels ist Energie die Möglichkeit *mechanische* Arbeit zu verrichten, wie wir sie im vorigen Abschnitt kennengelernt haben. Im weiteren Sinne gibt es auch andere Formen der Energie wie Wärmeenergie oder elektrische Energie, auf die wir in diesem Abschnitt nicht weiter eingehen. Energie ist ein Skalar, erhält das Formelzeichen  $E$  und wird wie die Arbeit in Joule, kurz J gemessen:

$$[E] = \text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Wird an einer Masse eine Arbeit verrichtet, so ist die Arbeit gewissermaßen in der Masse „gespeichert“. Wir führen den Begriff der *Energie* ein, und unterscheiden zwischen *kinetischer* und *potentieller* Energie.

### 5.2.1. Kinetische Energie

Wird ein Körper mit Masse  $m$  über eine Strecke  $s$  mit der Kraft  $F$  beschleunigt, so wurde die Arbeit  $W = Fs$  verrichtet und es ist die selbe Menge an Energie

$E = Fs$  in der Bewegung des Körpers gespeichert. Wir verwenden hier den Begriff der *kinetischen* Energie.

Wie viel kinetische Energie ist in einem Körper der Masse  $m$  gespeichert, der sich mit Geschwindigkeit  $v$  bewegt?

Wir betrachten einen Körper, der mit konstanter Kraft gleichmäßig beschleunigt wird. Bezogen auf die Zeit wird der Körper gleichmäßig schneller, siehe Abbildung 5.4 oben. Tragen wir die Geschwindigkeit über die Strecke auf, so stellen wir fest, dass sich die Geschwindigkeit mit der Wurzel der Strecke erhöht, siehe Abbildung 5.4 mitte. Eine konstante Beschleunigung setzt eine konstante Kraft voraus, die den Körper beschleunigt. Da bei konstanter Kraft die Energie proportional zur zurückgelegten Strecke ist, können wir das Diagramm umkehren, und statt der Strecke  $s$  die Energie  $E$  auftragen, siehe Abbildung 5.4 unten.

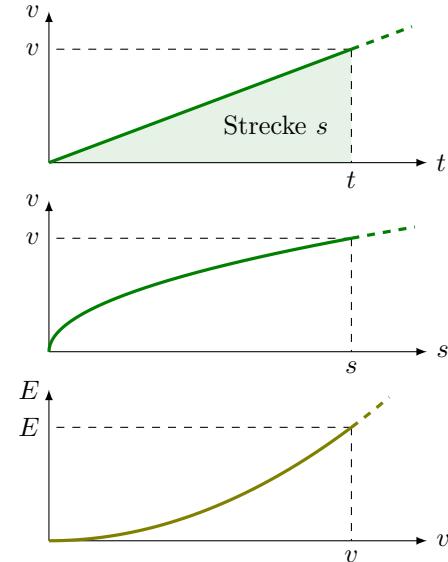


Abbildung 5.4.: Geschwindigkeit und kinetische Energie bei konstanter Beschleunigung.

Wir betrachten einen Körper der Masse  $m$ , der mit der Kraft  $F$  über eine Zeit  $t$  gleichmäßig beschleunigt wird. Zum Zeitpunkt null sind Position  $s_0$  und Geschwindigkeit  $v_0$  gleich null. Für Geschwindigkeit und Zeit ergibt sich:

$$v = at + \underbrace{v_0}_{=0} = at = \frac{\mathbf{F}}{m} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{vm}{\mathbf{F}}$$

Damit können wir die Energie  $E$  als Funktion der Geschwindigkeit  $v$  herleiten:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \mathbf{F}s = \mathbf{F} \left( \frac{a}{2} t^2 + \underbrace{v_0 t + s_0}_{=0} \right) = \mathbf{F} \frac{a}{2} t^2 \\ &= \mathbf{F} \frac{m}{2} t^2 = \frac{\mathbf{F}^2}{2m} t^2 = \frac{\mathbf{F}^2}{2m} \cdot \frac{v^2 m^2}{\mathbf{F}^2} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2} v^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bemerkenswert ist, dass die Geschwindigkeit zum Quadrat genommen wird. So hat ein PKW mit einer

Geschwindigkeit von 60 km/h die vierfache Energie gespeichert wie bei 30 km/h. Die Auswirkungen werden bei Unfällen deutlich. Gleichzeitig ist für die Beschleunigung von 30 km/h auf 60 km/h dreimal soviel Energie nötig wie für die ersten 30 km/h.

### 5.2.2. Potentielle Energie

Wird ein Körper der Masse  $m$  um die Höhe  $h$  entgegen der Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$  angehoben, ist in ihm eine *potentielle Energie* gespeichert:

$$E_{\text{pot}} = m(-\mathbf{g})h = -m\mathbf{g}h \quad (5.5)$$

Der Begriff der potentiellen Energie wird immer dann verwendet, wenn durch das Verschieben eines Körpers ein Kraftfeld überwunden werden muss. Das kann wie hier erwähnt eine Masse im Kraftfeld der Erde sein, das Stauchen oder Strecken einer Feder wie in Anwendung 5.3 beschrieben oder das Elektron im Kraftfeld eines Atomkerns.

Bei der Frage, wie viel potentielle Energie in einem Körper gespeichert ist, muss der Bezugspunkt geklärt werden. Beispiel: Wurde ein voller Wassereimer mit 10 kg Masse um einen Meter angehoben, so wurde eine Arbeit von  $W = mgh = 98,1 \text{ J}$  geleistet und in Form potentieller Energie gespeichert. Wird dieser Eimer dann in ein 1 m tiefes Loch fallengelassen, so gibt er die doppelte Energie, also 196,2 J ab.

Daher ist es wichtig, den Bezugspunkt für die potentielle Energie anzugeben. Es spielt dabei keine Rolle, ob dieser Bezugspunkt tatsächlich erreichbar ist. So kann es sinnvoll sein, den Bezugspunkt ins Unendliche zu legen, damit sich die Berechnungen vereinfachen. Zum Beispiel wird die potentielle Energie eines Elektrons in einem Atom oder Molekül relativ zum Unendlichen angegeben, was der negativen Bindungsenergie entspricht.

Für die potentielle Energie ist die benötigte Zeit ohne Bedeutung. Ob Sie einen Eimer Wasser innerhalb einer Sekunde vom Boden auf den Tisch stellen, oder ob Sie für die gleiche Aktion eine Stunde brauchen – in beiden Fällen speichert der Wassereimer die gleiche potentielle Energie.

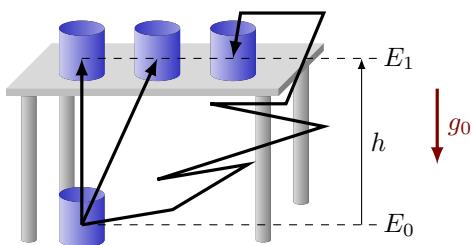


Abbildung 5.5.: Nur die Strecke entlang der Kraft wirkt sich auf die potentielle Energie aus.

Für die potentielle Energie ist nur die Wegstrecke entlang der Kraft von Bedeutung. Es spielt dabei keine Rolle, wie lang die bewegte Strecke insgesamt war. Es können auch beliebige Umwege verwendet werden, siehe Abbildung 5.5.

### 5.3. Energieerhaltungssatz

Der *Energieerhaltungssatz* (kurz *Energiesatz*) besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Energien über die Zeit konstant ist. Es ist unmöglich innerhalb eines geschlossenen Systems Energie zu erzeugen oder zu vernichten.

$$\sum_i E_i = \text{konstant} \quad (5.6)$$

In der klassischen Mechanik kennen wir zunächst nur zwei Energieformen: kinetische und potentielle Energie. Betrachten wir z.B. einen Körper der Masse  $m$ , den wir um eine Höhe  $h$  fallen lassen, so verliert er die potentielle Energie  $E_{\text{pot}} = mgh$ . Gleichzeitig wird der Körper auf die Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$  beschleunigt, was einer kinetischen Energie von  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$  entspricht. Entlang der Höhe  $h$  ist die Summe von potentieller und kinetischer Energie konstant:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konstant} \quad \text{für abgeschl. System}$$

Diese Aussage stimmt nur, solange wir keine Energie dem System hinzufügen, entnehmen, oder in andere Energieformen umwandeln. Wenn der eben beschriebene Körper auf dem Boden zur Ruhe kommt, so hat er seine kinetische Energie in Reibungs-, Verformungs- und Wärme-Energie umgewandelt. Schließen wir diese Energieformen in unsere Betrachtung mit ein, behält der Energieerhaltungssatz seine Gültigkeit.

Abbildung 5.6 zeigt die Flugbahn eines Gummiballs. Die Abläufe der Energien sind wie folgt: potentielle Energie aufgrund der Höhe des Balls - kinetische Energie in Abwärtsbewegung - potentielle Energie innerhalb des Gummiballs - kinetische Energie in Aufwärtsbewegung - potentielle Energie aufgrund der Höhe des Balls. Während der ganzen Übergänge behält der Ball eine kinetische Energie aufgrund der horizontalen Komponente der Bewegung. Gleichzeitig findet aufgrund von Reibung kontinuierlich ein Energietransfer in Richtung Wärme statt.

Der *Energieerhaltungssatz* ist eines der wichtigen Prinzipien in der Mechanik. Zusammen mit der *Impulserhaltung* und der *Drehimpulserhaltung*, die wir später kennenlernen, lassen sich zahlreiche Fragestellungen in der Mechanik beantworten.

### 5.4. Leistung $P$

*Leistung* steht für Arbeit pro Zeit bzw. Energie pro Zeit. Zum einen wird durch Leistung die *tatsächlich* abgegebene Energie pro Zeit angegeben, zum anderen beschreibt Leistung die *Möglichkeit* Energie pro Zeit abzugeben. Leistung erhält das Formelzeichen  $P$  und wird in *Watt*, kurz *W* gemessen.

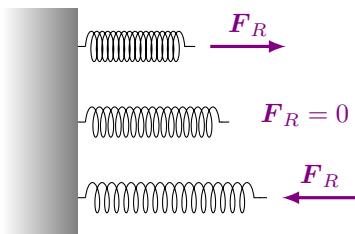
$$[P] = W = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$$

Wenn Sie eine Treppe hochgehen, *leisten* Sie eine gewisse Arbeit. Hier begegnet uns umgangssprachlich bereits der Begriff der *Leistung*. Sie können die

## Anwendung 5.1: Kraft und Energie einer Feder

Wirkt auf eine Feder eine äußere Kraft, so ändert sich die Länge der Feder und es wirkt eine Rückstellkraft  $F_R$  der von außen einwirkenden Kraft entgegen.

Bauformen sind Schraubenfedern, Kegelfedern, Schneckenfedern, Blattfedern etc. Es wird zwischen Zugfedern, Druckfedern und Zug-Druck-Federn unterschieden. Beispiele finden sich im Kugelschreiber (Druckfeder), in einer Hängewaage (Zugfeder) oder bei der Entkopplung von Massen (Zug-Druck-Feder).



Die Verformung einer Feder wird in einen *elastischen* und einen *unelastischen* Bereich unterteilt. Elastisch heißt, die Feder nimmt nach entfernen der Kraft ihr ursprüngliches Maß wieder an bzw. jeder auf sie einwirkende Kraft ist eine eindeutige Länge zuzuordnen. Eine unelastische Verformung liegt vor, wenn die angelegte Kraft zu einer dauerhaften Verformung führt.

Für viele Federn verhalten sich Kraft und Änderung der Länge proportional zueinander. Robert Hook (1635-1703) hat daraus das später nach ihm benannte *Hooke'sche Gesetz* abgeleitet. Es besagt, dass die Rückstellkraft einer Feder  $F_R$  proportional zur negativen Federauslenkung  $\Delta l$  ist.

$$F_R = -D\Delta l \quad (5.7)$$

Die *Federkonstante*  $D$  gibt das Verhältnis zwischen Kraft  $F_R$  und negativer Auslenkung  $\Delta l$  an:

$$D = -\frac{F_R}{\Delta l}$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich, da die Rückstellkraft der Feder der Auslenkung entgegen wirkt.

Die in einer Feder gespeicherte Energie  $E_{\text{pot}}$  ergibt sich aus dem Produkt der angelegten Kraft  $F$  und der zurückgelegten Strecke  $\Delta l$ . Da sich die Kraft mit der Auslenkung ändert, muss die Kraft über die Auslenkung integriert werden:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \int_0^{\Delta l} F \, dl = \int_0^{\Delta l} D l \, dl = D \left[ \frac{1}{2} l^2 \right]_0^{\Delta l} \\ E_{\text{pot}} &= \frac{D}{2} \Delta l^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

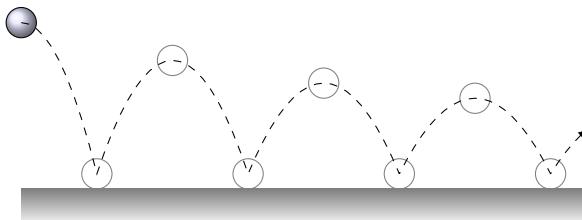


Abbildung 5.6.: Flugbahn eines Gummiballs.

Treppe schnell oder langsam hochsteigen, in beiden Fällen wurde Ihnen als Körper die gleiche potentielle Energie hinzugefügt. Es scheint Ihnen aber, dass Sie beim schnellen Hochsteigen der Treppe mehr *leisten* als beim langsamen Hochsteigen. Wir definieren die *mittlere Leistung*  $\bar{P}$  als den Quotienten der geleisteten Arbeit  $\Delta W$  und der benötigten Zeit  $\Delta t$ :

$$\bar{P} = \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Oft ändert sich die Leistung über die Zeit, so dass wir für die *momentane Leistung* das Zeitintervall  $\Delta t$  gegen null gehen lassen:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (5.9)$$

Entsprechend ist die tatsächlich geleistete Arbeit  $W$  bzw. die übertragene Energie gleich dem Integral der Leistung  $P$  über die Zeit  $t$ , siehe Abbildung 5.7.

$$W = \int P \, dt \quad (5.10)$$

Von Interesse ist die benötigte Leistung um einen Körper mit Geschwindigkeit  $v$  gegen eine Kraft  $F$  in Bewegung zu halten. Es folgt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \, dr}{dt} = F \, v$$

Es gilt wieder das Skalarprodukt zwischen den Vektoren Kraft  $F$  und  $v$ , so dass wir allgemein schreiben können:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (5.11)$$

Die Angabe von Leistungen begegnet uns an vielen Stellen des Alltags: 60 W für eine herkömmliche Glühlampe, 12 W für eine vergleichbare Energiesparlampe, 90 W auf dem Netzteil Ihres Laptops, 1 200 W auf einem Föhn, 15 kW für eine Zentralheizung, 50 kW bei einem PKW, 1,5 MW für ein großes Windrad oder 1,5 GW für ein kräftiges Kohlekraftwerk.

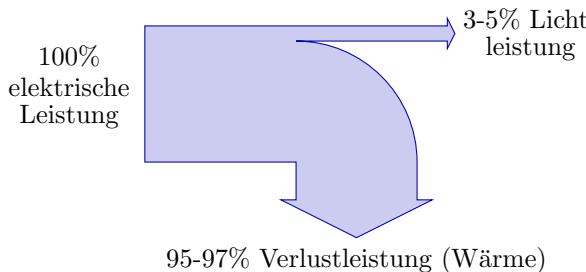
Zunächst müssen wir zwischen *verbrauchter* und *erzeugter* Leistung unterscheiden. Ein Verbraucher mit einer Angabe von 1 W benötigt zum Betrieb 1 J pro Sekunde. Entsprechend kann eine Energiequelle mit der Angabe 1 W genau 1 J pro Sekunde liefern.

Als nächstes müssen wir zwischen der *maximalen* (oder *möglichen*) Leistung und der *aktuellen* (oder *tatsächlichen*) Leistung unterscheiden. Ein PKW mit

## Anwendung 5.2: Energieverbrauch, Verlustleistung und Wirkungsgrad

Die genannten Begriffe machen im Kontext der Energieerhaltung zunächst keinen Sinn. Wie kann es einen Verlust von Energie geben, wenn die Summe aller Energien konstant ist? — Gemeint sind die Übergänge von gewollten Energien zu ungewollten Energien.

Als Beispiel betrachten wir eine Glühlampe, bei der ein Wolframfaden durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht wird. Das folgende sog. *Sankey-Diagramm* zeigt die eingespeiste Leistung (100%), die genutzte Leistung (3-5%) und die Verlustleistung (95-97%).



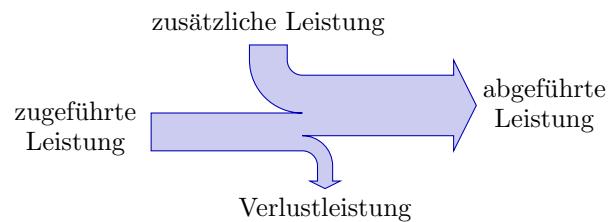
Der *Wirkungsgrad* beschreibt das Verhältnis von abgeführter Leistung  $P_{ab}$  zu zugeführter Leistung  $P_{zu}$ . Der Wirkungsgrad kann auch über die abgeführte und zugeführte Energie,  $E_{zu}$  und  $E_{ab}$  beschrieben werden.

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{E_{ab}}{E_{zu}}$$

Als Formelzeichen für den Wirkungsgrad wird das griechische  $\eta$  (Eta) vergeben. Es wird keine Einheit verwendet. Der Wertebereich liegt zwischen null und eins bzw. 0% und 100%.

Die oben gezeigte Glühlampe hat somit einen Wirkungsgrad von 0,03 bis 0,05 bzw. von 3 bis 5%.

Ab und zu wird ein Wirkungsgrad von über 100% angegeben, was mit der hier gezeigten Definition unmöglich ist. Beispiele sind Heizungsanlagen mit Brennwerttechnik oder Wärmepumpen. Bei diesen Angaben über 100% verbergen sich andere Energiequellen, die bei der Bestimmung des Wirkungsgrads nicht berücksichtigt wurden, siehe folgendes Sankey-Diagramm.



Wichtig ist die *Berechnung* des Wirkungsgrads für ein gegebenes Produkt zu kennen. Oft werden nur die höchsten Werte präsentiert. So bezieht sich der Wirkungsgrad von 400% für eine Heizungsanlage mit Wärmepumpe auf das Verhältnis von genutzer Wärme zu elektrischer Energie der Wärmepumpe unter idealen Bedingungen. Werden die Wirkungsgrade der Kraftwerke und des Stromtransports, sowie die typischen Betriebsbedingungen über das ganze Jahr berücksichtigt, so kann der Gesamtwirkungsgrad unter einer normalen Öl oder Gasheizung liegen.

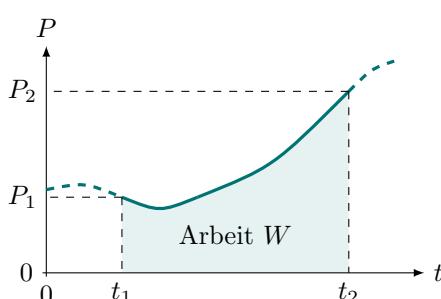


Abbildung 5.7.: Die Arbeit/Energie ist das Integral der Leistung über die Zeit.

50 kW Leistung wird diese nur bei optimaler Drehzahl und maximaler Belastung erreichen. In den meisten Fällen wird die tatsächliche Leistung des PKWs deutlich unter diesem Wert liegen (was sich positiv auf die Benzinrechnung auswirkt). Entsprechendes gilt bei Verbrauchern: Die Leistungsangabe bezieht sich auf den Maximalwert des Verbrauchers. Ihr Föhn wird nur bei der höchsten Stufe die angegebenen Leistung benötigen.

Die Begriffe *Leistung* und *Energie* dürfen nicht verwechselt werden. Umgangssprachlich begegnet uns der Begriff *Energieverbrauch* der in Bezug auf elektrische Energie mit der Einheit Kilowattstunden, kurz kWh gemessen wird. Die Kilowattstunde (kWh) ist physikalisch gesehen eine weitere Einheit der Energie:

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kWh} \cdot \frac{1000 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws} = 3,6 \text{ MJ}$$

In diesem Zusammenhang wird ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den Einheiten deutlich:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws} \quad (5.12)$$

Es ist dem Beitrag der SI-Einheiten zu verdanken, dass dieser Zusammenhang ohne weitere Faktoren möglich ist! Die drei Einheiten repräsentieren drei

große Bereiche der Physik: *Thermodynamik*, *Mechanik* und *Elektrodynamik*. Durch diese Angleichung können die Energien von einem Bereich der Physik in andere Bereiche übertragen werden. So wird in einen Elektromotor elektrische Energie hineingegeben und mechanische Energie entnommen. Gleches gilt für den Übergang von Mechanik zur Wärme (Reibung), oder von der Elektrik zur Wärme (elektrische Heizung) etc.

## 5.5. Aufgaben

**Aufgabe 5.1:** Sie verschieben auf Ihrem Dachboden eine schwere Kiste um 5 m mit einer horizontalen Kraft von 240 N. Wie viel Arbeit haben Sie geleistet?

**Aufgabe 5.2:** Sie legen auf dem Hamburger Flughafen mit Ihrem Koffer eine Strecke von 500 m zurück. Dabei ziehen an dem Riemen des Koffers mit durchschnittlich 20 N unter einem Winkel von  $60^\circ$  relativ zur horizontalen. a) Wie viel Arbeit haben Sie verrichtet? b) Wie viel Kraft wäre für eine kleinere Person nötig, die den Koffer unter einem Winkel von  $30^\circ$  relativ zur Oberfläche zieht?

**Aufgabe 5.3:** a) Wie viel kinetische Energie ist in einem Radfahrer gespeichert, der zusammen mit seinem Fahrrad 117 kg wiegt und gerade 24 km/h fährt? b) Wie viel Energie ist einem PKW gespeichert, der mit 120 km/h fährt und zusammen mit Fahrern und Gepäck 1,44 t wiegt? c) Wie viel kinetische Energie ist in der Erde gespeichert, die sich mit einem Radius von 149 600 000 km um die Sonne rotiert und eine Masse von  $5,9737 \cdot 10^{24}$  kg hat?

**Aufgabe 5.4:** Ein ICE mit Masse 450 t werde mit einer Kraft von 200 kN beschleunigt. Wie lange braucht der Zug, um von null auf 100 km/h zu beschleunigen?

**Aufgabe 5.5:** Sie schaufeln 5 t Sand auf einen LKW, dessen Ladefläche ca. 1 m höher gelegen ist. Wie viel potentielle Energie ist in dem Sand gespeichert?

**Aufgabe 5.6:** Ein Wanderer erreicht auf seiner 12 km langen Wanderung einen um 500 m höher gelegenen Punkt. Ausgehend von einem Gewicht mit Kleidung und Gepäck von 110 kg, wie viel potentielle Energie hat der Wanderer gewonnen?

**Aufgabe 5.7:** Zum Wechseln der Stoßdämpfer eines PKWs wird das Federbein (Feder-Stoßdämpfer-Kombination) unter Spannung aus- und wieder eingebaut. Wenn die Feder mit Konstante 12 kN/m um 20 cm gestaucht ausgebaut wird, welche Energie ist in ihr gespeichert?

**Aufgabe 5.8:** Eine Kugel mit Masse 100 g wurde von einer Feder mit Konstante 1 kN/m beschleunigt, die zuvor um 10 cm gestaucht wurde. Wie schnell bewegt sich die Kugel unter idealen Voraussetzungen?

**Aufgabe 5.9:** Ein Turmspringer mit Körpergewicht 75 kg springt von einem 10 m hohen Turm ins Wasser. Wie viel kinetische Energie ist in dem Springer auf Höhe der Wassers gespeichert, und wie hoch ist seine Geschwindigkeit?

**Aufgabe 5.10:** Ein Kran verbraucht maximal 3 kW und hat einen Wirkungsgrad von 0,7. Mit welcher maximalen Geschwindigkeit kann der Kran ein Gewicht von 1 t anheben?

**Aufgabe 5.11:** Sie konstruieren einen PKW mit elektrischem Antrieb, der bei 120 km/h einer Kraft von 420 N standhalten muss. Wie viel Leistung in kW muss der Wagen haben?

**Aufgabe 5.12:** Der Luftwiderstand eines PKWs steigt in etwa quadratisch mit der Geschwindigkeit. Sie vergleichen zwei PKWs: Fahrzeug a) fährt für eine Stunde gleichmäßig mit 100 km/h. Fahrzeug b) fährt für 30 Min. mit 50 km/h und dann für weitere 30 Min. mit 150 km/h. Um welchen Faktor muss Fahrzeug b) mehr Arbeit verrichten als Fahrzeug a)?

**Aufgabe 5.13:** Eine Kanonenkugel wiege 5 kg, werde in der Kanone mit einer Arbeit von 5 000 J beschleunigt und unter  $45^\circ$  abgeschossen. Wie weit fliegt die Kanonenkugel auf ebener Fläche?

# 6. Impuls und Stoß

## 6.1. Impuls $p$

Der *Impuls* (auch *Bewegungsmenge* oder *Momentum*) beschreibt die Bewegung, die in einer Masse enthalten ist. Umgangssprachlich kann auch von *Wucht* oder *Schwung* gesprochen werden. Der Impuls eines Körpers ist das Produkt aus Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  und ist damit eine gerichtete Größe:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (6.1)$$

Der Impuls erhält das Formelzeichen  $p$  und wird in Newtonsekunden, kurz Ns gemessen:

$$[p] = \text{Ns} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

Der deutsche Begriff *Impuls* ist etwas irreführend, beschreibt er doch intuitiv ein kurzzeitiges Ereignis. Tatsächlich führt ein sich bewegender Körper ständig einen Impuls mit sich. Die kurzzeitige Änderung der Bewegung wird weiter unten unter dem Begriff *Stoß* behandelt.

Für den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie  $E_{\text{kin}}$  und Impuls  $\mathbf{p}$  erweitern wir die Gleichung für die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2$  mit der Masse  $m$  und ersetzen das Produkt  $m\mathbf{v}$  durch den Impuls  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m^2\mathbf{v}^2}{2m} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Der Zusammenhang zwischen Kraft für die Beschleunigung und Impuls lässt sich über die Beschleunigung herleiten. Zusammen mit der Umkehrung stellt diese Gleichung einen Elementaren Zusammenhang dar:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d\frac{\mathbf{p}}{m}}{dt} \\ \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt \quad (6.4)$$

In Abbildung 6.1 ist der Zusammenhang zwischen Kraft  $\mathbf{F}$  und Impuls  $\mathbf{p}$  der genannten Gleichungen für ein Intervall  $\Delta t$  grafisch dargestellt. Wir erinnern uns, eine Kraft  $\mathbf{F}$  über eine Strecke  $s$  entspricht der Arbeit (bzw. Energie):  $W = \int \mathbf{F} ds$ . Der Impuls ist eine Kraft  $\mathbf{F}$  über eine Zeit  $t$ :  $\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$ .

Der Zusammenhang zwischen Impuls  $\mathbf{p}$  und Kraft  $\mathbf{F}$  ist unabhängig von der Masse des bewegten Körpers. Werden auf zwei Körper unterschiedlicher Massen  $m_1$  und  $m_2$  für die gleiche Zeit  $\Delta t$  die gleiche Kraft  $\mathbf{F}$  ausgeübt, so erhalten beide den gleichen Impuls  $\Delta\mathbf{p}$ .

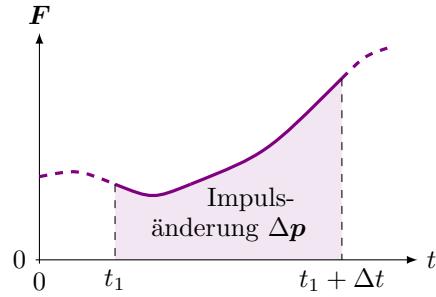


Abbildung 6.1.: Impuls ist das Produkt aus Kraft und Zeit.

Wirkt auf einen Körper eine konstante Kraft  $\mathbf{F}_0$ , so lässt sich das Integral für den Impuls lösen, siehe Abbildung 6.2:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{F}_0 dt = \mathbf{F}_0 t + \mathbf{p}_0 \quad \text{für } \mathbf{F}_0 = \text{konst.}$$

Je nach Fragestellung kann die Konstante  $\mathbf{p}_0$  häufig auf null gesetzt werden.

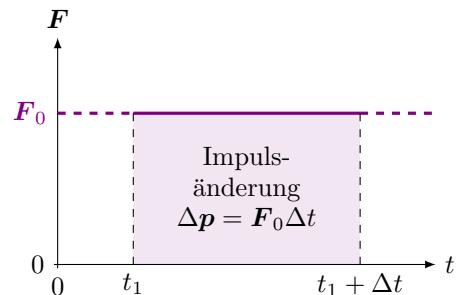


Abbildung 6.2.: Impulsänderung im Intervall  $\Delta t$  bei konstanter Kraft.

## 6.2. Stoß

Der *Stoß* ist eine kurze Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, bei dem sich im Allgemeinen Geschwindigkeit und Richtung, und damit auch Impuls und Energie der Körper ändern. Während eines Stoßes treten für kurze Zeit größere Kräfte auf, die dafür sorgen, dass die Körper ihre Bewegung ändern. Vor einem Stoß bewegen sich die zwei Körper aufeinander zu, nach dem Stoß entfernen sie sich voneinander, siehe Abbildung 6.3.

Die Änderung des Impulses ergibt sich aus dem Integral der Kraft über die Zeit während des Stoßes:

$$\Delta\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \mathbf{F} dt$$

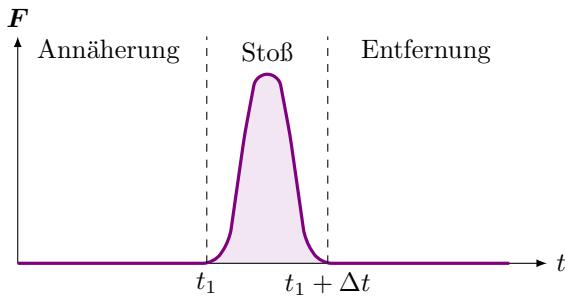


Abbildung 6.3.: Bei einem Stoß treten für eine kurze Zeit große Kräfte auf.

Die Frage, ab welcher Zeit eine Impulsänderung als Stoß betrachtet werden kann, ist nicht eindeutig zu beantworten. Wird ein PKW in 10 s von null auf 50 km/h beschleunigt, so spricht man nicht von einem Stoß. Wenn der PKW mit 50 km/h gegen einen Baum fährt, und in Bruchteilen einer Sekunde auf null abgebremst wird, so kann klar von einem Stoß gesprochen werden. Dagegen kann eine Sternkollision aus mechanischer Sicht deutlich länger ausfallen. Es kommt auf den Kontext an.

Beispiel: Beim Elfmeterschießen im Fußball wird der Ball aus seinem Ruhezustand durch einen Tritt des Spielers in Bewegung gesetzt. Bei einem Gewicht von 450 g und einer Geschwindigkeit von 100 km/h entspricht dies einem Impulsübertrag von 12,5 Ns.

Beispiel: Wird eine 170 g Kugel beim Poolbillard um 10 m/s beschleunigt, so wurde ihr ein Impuls von 1,7 Ns zugefügt.

### 6.3. Impulserhaltungssatz

Wir haben bereits gesehen, dass die auf einen Körper einwirkende Kraft gleich der Änderung des Impulses ist, siehe (6.3). Wirkt auf den Körper *keine* Kraft, so heißt das im Gegenzug, dass der Impuls konstant ist.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.}$$

Der *Impulserhaltungssatz* besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Impulse konstant ist.

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \text{konstant} \quad (6.5)$$

Finden Kollisionen zwischen den Körpern eines abgeschlossenen Systems statt, so ändern sich zwar die Impulse einzelner Körper, aber der Gesamtimpuls bleibt unverändert.

Der *Impulserhaltungssatz* ist ein elementarer Erhaltungssatz der Mechanik. Zusammen mit dem Energieerhaltungssatz lassen sich zahlreiche Bewegungen beschreiben. Im Folgenden wollen wir die beiden uns bekannten Erhaltungssätze bei Stößen anwenden.

#### 6.3.1. Elastischer Stoß

Wir betrachten einen elastischen, zentralen Stoß auf einer Geraden: Zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  bewegen sich vor der Kollision mit den entsprechenden Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  aufeinander zu. Bei der Kollision ändern sich ihre Geschwindigkeiten entsprechend zu  $v'_1$  und  $v'_2$ , mit der sie sich dann auseinander bewegen, siehe Abbildung 6.4.

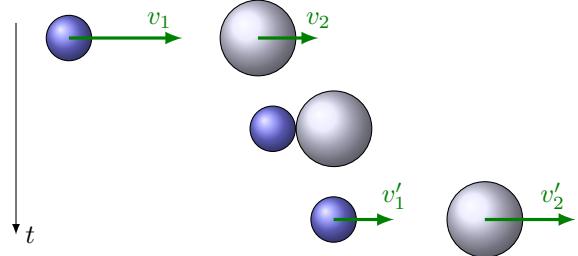


Abbildung 6.4.: Elastischer Stoß zwischen zwei Kugeln.

Vor dem Stoß nähern sich die beiden Körper mit der Geschwindigkeit  $|v_1 - v_2|$  an, nach dem Stoß entfernen sich die Körper voneinander mit der Geschwindigkeit  $|v'_1 - v'_2|$ , siehe Abbildung 6.5.

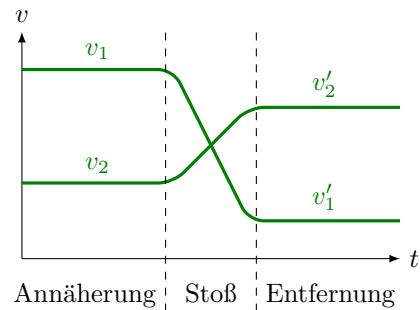


Abbildung 6.5.: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit beim elastischen Stoß.

Wir wenden den Impulserhaltungssatz an:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ m_1 (v_1 - v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2) \end{aligned}$$

Das Gleiche gilt für den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 &= \frac{m_1}{2} v'^2_1 + \frac{m_2}{2} v'^2_2 \\ m_1 (v_1^2 - v'^2_1) &= m_2 (v'^2_2 - v_2^2) \\ m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \end{aligned}$$

Wir setzen den umgeformten Impulssatz links ein:

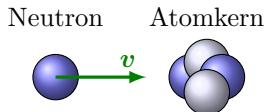
$$\begin{aligned} m_2 (v'_2 - v_2)(v_1 + v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \\ v_1 + v'_1 &= v_2 + v'_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wir setzen (6.6) in den umgeformten Impulssatz ein:

$$\begin{aligned} m_1 (v_1 - v'_1) &= m_2 (v'_1 + v_1 - v_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 - v_2 - v'_2 + v_1) &= m_2 (v'_2 - v_2) \end{aligned}$$

## Anwendung 6.1: Abbremsen von Neutronen in einem Reaktor

Bei der Spaltung von Uran-Atomen in einem Kernreaktor entstehen schnelle Neutronen, welche die Spaltung weiterer Uran-Atomkerne auslösen. Allerdings müssen die Neutronen abgebremst werden, damit die Wahrscheinlichkeit der Kernspaltung zunimmt. Mit welchen Elementen können Neutronen am wirksamsten abgebremst werden?



Nach der Kollision beträgt die Geschwindigkeit des Atomkerns:

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Wenn ein schnelles Neutron auf einen ruhenden Atomkern trifft, so wird bei dem Stoß eine Energie vom Neutron an den Atomkern übertragen:

$$E_{\text{trans}} = E'_2 = \frac{m_2}{2} v'^2_2$$

Wir setzen die Geschwindigkeit des Atoms ein:

$$E_{\text{trans}} = E'_2 = \frac{m_2}{2} \left( \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \right)^2$$

Mit  $f$  für die Atommasse  $m_2$  relativ zur Neutronenmasse  $m_1$  folgt mit  $m_2 = fm_1$ :

$$E_{\text{trans}} = \frac{fm_1}{2} \left( \frac{2m_1v_1}{m_1 + fm_1} \right)^2 = \frac{2fm_1v_1^2}{(f+1)^2}$$

Nach Umstellung ergibt sich:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (6.7)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (6.8)$$

Beispiel: Eine Kugel mit Masse 3 kg und Geschwindigkeit 4 m/s trifft auf eine ruhende Kugel mit Masse 1 kg. Nach dem Stoß hat die schwerere Kugel eine Geschwindigkeit von 2 m/s und die vorher ruhende Kugel bewegt sich mit 6 m/s. Vor und nach dem Stoß beträgt der Gesamtimpuls 12 Ns und die Gesamtenergie 24 J.

Von besonderem Interesse ist das Abbremsen von Körpern durch ruhende Objekte. Um einen maximalen Energietransfer zu erzielen müssen die Massen der bewegten und ruhenden Körper gleich gewählt werden, siehe Anwendung 6.3.1.

### 6.3.2. Unelastischer Stoß

Wir betrachten einen unelastischen, zentralen Stoß auf einer Geraden: Zwei unelastische Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  bewegen sich vor dem Stoß mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ . Beim Stoß verformen sich die Körper der Art, dass sie sich nach dem Stoß zusammen mit gleicher Geschwindigkeit  $v'$  bewegen, sie-

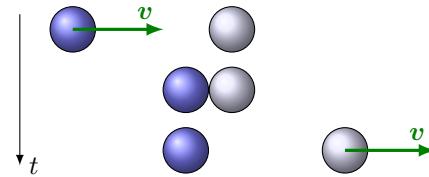
Wir wollen das Maximum von  $E_{\text{trans}}$  finden, leiten daher die Energie nach  $f$  ab und setzen diese gleich null:

$$\frac{dE_{\text{trans}}}{df} = 2m_1v_1^2 \frac{1-f}{(f+1)^3} = 0$$

$$f = 1$$

Bei  $f=1$  müssen die bremsenden Atome die gleiche Masse haben wie die Neutronen. Das beste Element dafür ist Wasserstoff mit nur einem Proton als Atomkern. Wasserstoff als reines Element ist ungünstig in der Handhabung. Gut geeignet ist normales Wasser,  $\text{H}_2\text{O}$ : Zwei von drei Atomen haben die ideale Atommasse, es hat eine hohe Wärmekapazität und die Wärme kann flüssig oder gasförmig abtransportiert werden.

Auch in der klassischen Mechanik kann diese Erkenntnis verwendet werden, um einen maximalen Energietransport zu erzielen.



he Abbildung 6.6. Die Geschwindigkeiten über die Zeit sind in Abbildung 6.7 dargestellt.

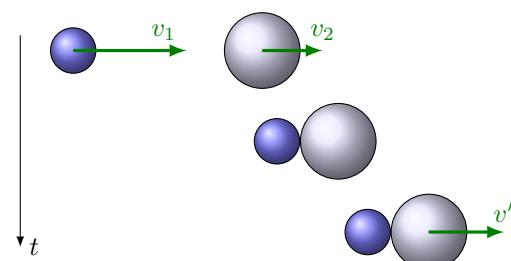


Abbildung 6.6.: Unelastischer Stoß zwischen zwei Kugeln.

Es gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

Die Gleichung lässt sich direkt nach  $v'$  umstellen:

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (6.9)$$

Beim unelastischen Stoß wird ein Teil der Bewegungsenergie in Verformungsarbeit  $W$  umgewandelt, so dass die Summe der kinetischen Energien beim Stoß

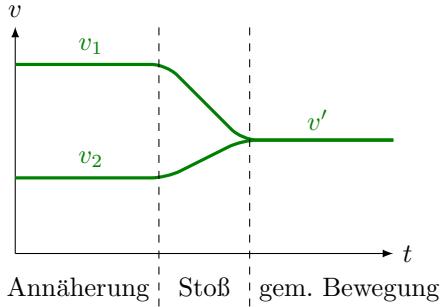


Abbildung 6.7.: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit beim unelastischen Stoß.

abnimmt. Mit  $E_1$  und  $E_2$  für die kinetischen Energien vor dem Stoß und  $E'$  für die kinetische Energie nach dem Stoß folgt für die Verformungsarbeit  $W$ :

$$\begin{aligned}
 W &= E_1 + E_2 - E' = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2}v'^2 \\
 &= \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} \left( \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \\
 &= \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \\
 &= \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2m_2 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)} \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2} \\
 W &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Unelastische Stöße begegnen uns bei Verkehrsunfällen. Dabei spielt die Verteilung der Massen auf die beiden Fahrzeuge eine wichtige Rolle. Das leichtere Fahrzeug erfährt eine höhere Änderung der Geschwindigkeit, so dass die Insassen größeren Kräften ausgesetzt sind.

Beispiel: Zwei PKWs kollidieren frontal. Beide Wagen haben vor der Kollision eine Geschwindigkeit von 30 km/h (einer in negativer Richtung). Die Massen der PKWs betragen  $m_1 = 1,6$  t und  $m_2 = 0,8$  t. Nach der Kollision bewegen sich beide (stark beschädigte) PKWs mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h, nur dass sich für den leichteren Wagen die Richtung umgekehrt hat. Das schwerere Fahrzeug hat eine Geschwindigkeitsänderung von 20 km/h erfahren, während das leichtere Fahrzeug seine Geschwindigkeit um 40 km/h geändert hat.

## 6.4. Bezugssysteme

Sie sitzen in einem gemächlich dahinfahrenden Zug, und lassen einen Stein aus dem Fenster fallen. Aus Ihrer Perspektive bewegt sich der Stein senkrecht nach unten, bis er schließlich auf dem Boden ankommt. Ein Fußgänger in der Nähe der Bahngleise beobachtet den Vorgang und sieht, wie der Stein in Form einer Parabel auf den Boden fällt, siehe Abbildung 6.8.

Wir haben im Verlauf der Vorlesung schon mehrfach gesehen, dass wir den Ursprung eines Koordinatensystems zur Berechnung einer Aufgabe zu unseren Gunsten platzieren können, wobei das Koordinatensystem unser Bezugssystem darstellt. Dabei haben wir bisher das Bezugssystem nur einmal statisch verschoben und über die Zeit nicht verändert. In diesem Abschnitt wollen wir das Bezugssystem dynamisch verschieben.

Grundsätzlich kann ein Bezugssystem über die Zeit beliebig verschoben werden, wir wollen uns aber hier auf ein *Inertialsystem* beschränken. In einem Inertialsystem wird das Bezugssystem mit einer gleichförmigen Bewegung verschoben. Das heißt, das bewegte Bezugssystem rotiert nicht, und wird nicht beschleunigt.

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{r}_B(t)$  den Ursprung eines sich bewegenden Bezugssystems zum Zeitpunkt  $t$  relativ zu einem ruhenden Bezugssystem, mit  $\mathbf{v}_B$  die Geschwindigkeit des Bezugssystems und mit  $\mathbf{r}_{B0} = \mathbf{r}_B(0)$  den Ursprung des Bezugssystems zum Zeitpunkt null. Die Größen im bewegten Bezugssystem versehen wir mit einem Apostroph '.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_B(t) &= \mathbf{v}_B t + \mathbf{r}_{B0} \\
 \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_B(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_B t - \mathbf{r}_{B0} \\
 \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_B
 \end{aligned}$$

Unsere bisherigen Untersuchungen bezogen sich ausschließlich auf einen ruhenden Betrachter. Wir verwenden für dieses ruhende Bezugssystem den Begriff *Labor*. Sie stehen in ihrem *Labor* und beobachten das Experiment.

Von besonderer Bedeutung ist das *Schwerpunktsystem*, bei dem wir das Bezugssystem dem *Schwerpunkt* der Massen folgen lassen. (Das Thema Schwerpunkt behandeln wir später ausführlicher.) Im Schwerpunktsystem ist die Summe der Impulse null. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_B$  des Schwerpunktsystems ergibt sich aus der Summe der Impulse. Für zwei bewegte Körper gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \\
 0 &= m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_B) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_B) \\
 \mathbf{v}_B(m_1 + m_2) &= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \\
 \mathbf{v}_B &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}
 \end{aligned}$$

Für beliebig viele Körper folgt:

$$\mathbf{v}_B = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{für Schwerpunktsystem} \tag{6.11}$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Bewegungen im Raum zu einem Zeitpunkt. Im Folgenden wollen wir den elastischen und unelastischen, zentralen Stoß auf einer Geraden im Schwerpunktsystem betrachten.

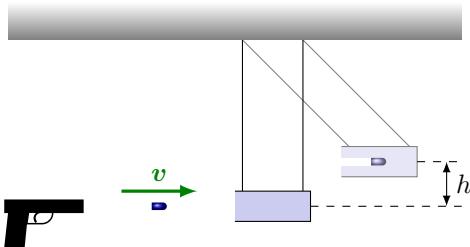
### 6.4.1. Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem

Die Summen der Impulse vor und nach dem Stoß sind null:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

## Anwendung 6.2: Ballistisches Pendel

Mit einem ballistischen Pendel wird die Geschwindigkeit von Projektilen bestimmt. Das Projektil wird auf ein Pendel geschossen und bleibt in ihm stecken (unelastischer Stoß). Das Pendel wird durch den Schuss in Bewegung gesetzt und bewegt sich bis zu einer maximalen Höhe  $h$ , siehe folgende Abbildung:



Wie hoch war die Geschwindigkeit  $v_1$  des Projektils mit Masse  $m_1$ , wenn das Pendel um eine Höhe  $h$  ausgeschlagen hat? Das Pendel habe die Masse  $m_2$  und befindet sich vor dem Schuss in Ruhelage.

Geschwindigkeit  $v'$  des Pendels direkt nach der Kollision mit dem Projektil:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + \cancel{m_2 v_2}}{m_1 + m_2} \stackrel{=0}{=} \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

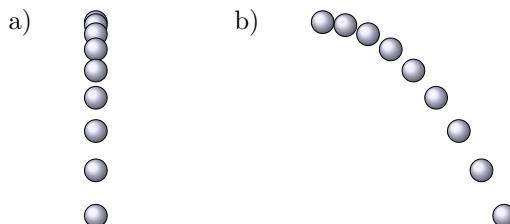


Abbildung 6.8.: Ein aus dem Zug fallen gelassener Stein a) aus Sicht eines bewegten und b) eines ruhenden Betrachters.

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_2 = -\frac{m_1}{m_2} v'_1$$

Wir setzen dies in (6.6) ein:

$$\begin{aligned} v_1 + v'_1 &= v_2 + v'_2 \\ v_1 + v'_1 &= -\frac{m_1}{m_2} v_1 + -\frac{m_1}{m_2} v'_1 \end{aligned}$$

$$v'_1 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = -v_1 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

Das gleiche können wir für die Geschwindigkeiten  $v_2$  und  $v'_2$  durchführen und erhalten:

$$v'_1 = -v_1 \quad \text{elastisch im Schwerpunktsystem} \quad (6.12)$$

$$v'_2 = -v_2 \quad \text{elastisch im Schwerpunktsystem} \quad (6.13)$$

Bei einem elastischen Stoß im Schwerpunktsystem bewegen sich zwei Körper nach dem Stoß jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit auseinander, mit der sie sich vor dem Stoß angenähert haben.

Kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  des Pendels direkt nach der Kollision mit dem Projektil:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  beim höchsten Ausschlag des Pendels:

$$E_{\text{pot}} = (m_1 + m_2) g_0 h$$

Jetzt setzen wir die Energien nach dem Energieerhaltungssatz zusammen und lösen nach der Projektil-Geschwindigkeit  $v_1$  auf:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) g_0 h &= \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \\ v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g_0 h} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wurde bereits 1740 von Benjamin Robins erfunden. Seinerzeit bestand das Pendel aus einem Stück Holz, das stark genug war, das Projektil einzufangen.

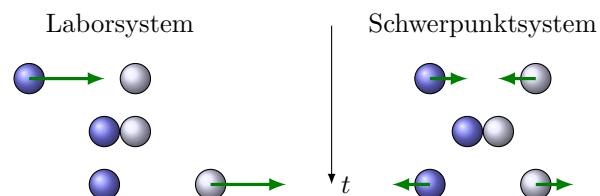


Abbildung 6.9.: Elastischer Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem.

### 6.4.2. Unelastischer Stoß im Schwerpunktsystem

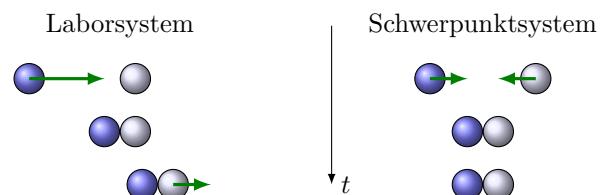


Abbildung 6.10.: Unelastischer Stoß im Laborsystem und Schwerpunktsystem.

Beim unelastischen Stoß im Schwerpunktsystem ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß null. Das ergibt sich aus dem Vergleich von (6.9) und (6.11).

$$v'_1 = v'_2 = v' = 0 \quad \text{unelastisch im Schwerpunktsys.} \quad (6.14)$$

## 6.5. Drehmoment, Drehimpuls und Trägheitsmoment

Wir haben uns schon an verschiedenen Stellen mit Körpern beschäftigt, die sich auf einer Kreisbahn bewegen. In diesem Abschnitt wollen wir dem weiter nachgehen, und führen die genannten Begriffe ein.

Die Bewegung auf einer Kreisbahn ist eng mit der Bewegung auf einer Geraden verwandt. Für viele Größen der geraden Bewegung gibt es ein Gegenstück für die Kreisbewegung. Mit einigen dieser Größen haben wir es in diesem Abschnitt zu tun und listen sie schon mal in Tabelle 6.1 auf.

### 6.5.1. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Zunächst betrachten wir die Größen *Winkel*, *Winkelgeschwindigkeit* und *Winkelbeschleunigung*.

Genauso, wie sich eine Position durch einen Ortsvektor ausdrücken lässt, können wir einen *Winkel* durch einen Vektor ausdrücken. Dabei entspricht der Betrag des Vektors dem Winkel in Bogenmaß. Die Richtung des Vektors ergibt sich durch die Drehrichtung des Winkels. Er steht senkrecht auf der Ebene des Winkels in Richtung eines rechtsdrehenden Systems, siehe Abbildung 6.11 links.

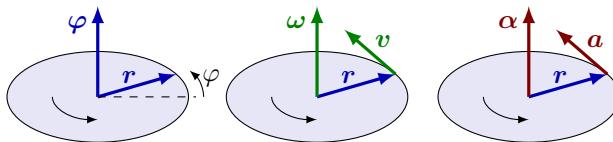


Abbildung 6.11.: Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung als Vektoren.

Bei einem rechtsdrehenden System zeigt der Vektor in die Richtung einer Schraube mit Rechtsgewinde: Drehen Sie die Schraube rechtsherum, so entfernt sie sich von Ihnen; drehen Sie die Schraube nach links, so bewegt sich sie auf Sie zu.

Wir haben bereits gesehen, dass sich die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  aus dem Quotienten von Geschwindigkeit  $v$  und Radius  $r$  ergibt:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Allgemeiner können wir uns die Winkelgeschwindigkeit als einen Vektor vorstellen, der senkrecht zu Radius und Geschwindigkeit steht, siehe Abbildung 6.11 Mitte.

Wir schreiben die Geschwindigkeit des Körpers als Vektorprodukt von Winkelgeschwindigkeit und Radius:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6.15)$$

Das Vektorprodukt schließt auch den Fall ein, dass sich der Körper nicht auf einer Kreisbahn bewegt. Bewegt sich der Körper z.B. radial vom Mittelpunkt des Kreises weg, so ist das Vektorprodukt null und es findet keine Drehung um den Mittelpunkt statt.

Das Gleiche gilt für die *Winkelbeschleunigung*  $\alpha$ . (Beachten Sie den Unterschied zwischen  $\alpha$  und  $a$  bzw. zwischen  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\boldsymbol{a}$ .) Die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ist die Beschleunigung  $a$  auf der Kreisbahn geteilt durch den Radius  $r$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

Allgemein schreiben wir:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (6.16)$$

Es gelten die gleichen Zusammenhänge wie bei einer geraden Bewegung:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (6.17)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (6.18)$$

$$\omega = \int \alpha dt \quad (6.19)$$

$$\varphi = \int \omega dt = \iint \alpha dt^2 \quad (6.20)$$

Bei einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  können wir das Integral für  $\varphi$  auflösen:

$$\varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + \varphi_0$$

wobei  $\varphi_0$  für den Winkel zum Zeitpunkt  $t = 0$  steht.

Bei einer gleichförmigen Winkelbeschleunigung  $\alpha_0$  können wir die Integrale für  $\omega$  und  $\varphi$  auflösen:

$$\omega = \int \alpha_0 dt = \alpha_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \int \omega dt = \int (\alpha_0 t + \omega_0) dt = \frac{\alpha_0}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

wobei  $\varphi_0$  und  $\omega_0$  für Winkel und Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  stehen.

### 6.5.2. Drehmoment $M$

Das *Drehmoment* beschreibt die Kraft, die auf eine Drehachse in Drehrichtung ausgeübt wird, siehe Abbildung 6.12.

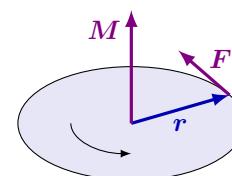


Abbildung 6.12.: Das Drehmoment.

Das Drehmoment ist proportional zur angelegten Kraft:

$$M \propto F$$

Je weiter entfernt von der Achse die Kraft angreift, desto größer ist das Drehmoment. Daher ist das Drehmoment auch proportional zum Abstand  $r$  zwischen Drehachse und angelegter Kraft:

Gerade Bewegung	Kreisbewegung	Zusammenhang
Position: $s$	Winkel: $\varphi$	
Geschwindigkeit: $v = \dot{s}$	Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dot{\varphi}$	$v = \omega \times r$
Beschleunigung: $a = \dot{v} = \ddot{s}$	Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	$a = \alpha \times r$
Kraft: $F = ma$	Drehmoment: $M = J\alpha$	$M = r \times F$
Masse: $m = \frac{F}{a}$	Trägheitsmoment: $J = \frac{m}{\alpha}$	$J = m r^2$
Impuls: $p = mv = \int F dt$	Drehimpuls: $L = J\omega = \int M dt$	$L = r \times p$
kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$	Rotationsenergie: $E_{\text{rot}} = \frac{J}{2}\omega^2$	$E_{\text{rot}} = E_{\text{kin}}$

Tabelle 6.1.: Vergleich von Kreisbewegung und gerader Bewegung eines Massenpunktes.

$$M \propto r$$

Wir verallgemeinern diese Zusammenhänge durch das Vektorprodukt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.21)$$

Das Drehmoment erhält das Formelzeichen  $M$  und wird in Newtonmetern, kurz Nm gemessen:

$$[M] = \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Das Drehmoment steht senkrecht auf Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und Kraftvektor  $\mathbf{F}$  in einem rechtsdrehenden System. Das Vektorprodukt berücksichtigt den Winkel zwischen Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und Kraftvektor  $\mathbf{F}$ , siehe Abbildung 6.13.

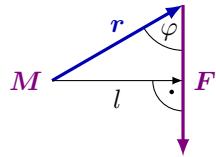


Abbildung 6.13.: Drehmoment mit Winkel  $\varphi$  zwischen Radius- und Kraftvektor.

Es ergibt sich eine effektive Länge  $l$  zwischen Kraft und Drehachse mit:

$$l = r \sin \varphi$$

Stehen der Radiusvektor  $\mathbf{r}$  und der Kraftvektor  $\mathbf{F}$  senkrecht aufeinander, so ergibt sich für das Drehmoment:

$$M = r F \quad \text{für } \mathbf{r} \text{ senkrecht auf } \mathbf{F}$$

Wirken auf eine Drehachse mehrere Drehmomente, so können diese zu einem Gesamtmoment addiert werden:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_i M_i$$

Dies gilt auch für Drehmomente unterschiedlicher Richtungen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \sum_i \mathbf{M}_i \quad (6.22)$$

Die genannten Gleichungen beschreiben nicht nur den Übergang von Kraft und Radius zum Drehmoment. Sie können auch für den Übergang von Drehmoment zur Kraft verwendet werden. So wird bei Motoren häufig das maximale Drehmoment angegeben, was etwas über das Kraftvermögen des Motors aussagt.

$$F = \frac{M}{r} \quad \text{für } \mathbf{r} \text{ senkrecht auf } \mathbf{F}$$

Bei PKWs findet sich oft das maximale Drehmoment bei einer gegebenen Drehzahl. Allerdings hat dies für den Kunden nur eine bedingte Aussagekraft. Um die maximale Beschleunigung zu bestimmen ist die maximale Leistung in PS oder kW hilfreicher.

### 6.5.3. Trägheitsmoment $J$

Wir betrachten einen Körper mit Masse  $m$ , auf den entlang einer Kreisbahn mit Radius  $r$  eine Kraft  $F$  wirkt, und der dadurch mit  $a$  beschleunigt wird:

$$F = m a$$

Wir ersetzen die Kraft durch das Drehmoment  $F = \frac{M}{r}$  und die Beschleunigung durch die Winkelbeschleunigung  $a = \alpha r$  und stellen die Gleichung um:

$$\begin{aligned} \frac{M}{r} &= m \alpha r \\ M &= m r^2 \alpha \end{aligned}$$

Das heißt, um einen Massenpunkt mit Masse  $m$  mit einer Winkelbeschleunigung  $\alpha$  zu beschleunigen, ist das genannte Drehmoment von  $M$  nötig.

Wir definieren das *Trägheitsmoment*

$$J = m r^2 \quad \text{für einen Massenpunkt} \quad (6.23)$$

Das Trägheitsmoment erhält das Formelzeichen  $J$  und wird in  $\text{kg m}^2$  gemessen:

$$[J] = \text{kg m}^2$$

Das Trägheitsmoment stellt das Bindeglied zwischen Winkelbeschleunigung und Drehmoment dar. Da die Vektoren von Winkelbeschleunigung und Drehmoment in die gleiche Richtung zeigen, können wir das Drehmoment  $\mathbf{M}$  allgemein beschreiben:

$$\mathbf{M} = J \boldsymbol{\alpha} \quad (6.24)$$

Bisher haben wir uns auf Massepunkte beschränkt. Für Körper endlicher Größe ergeben sich andere Trägheitsmomente, auf die wir in einem späteren Kapitel eingehen werden.

Das Trägheitsmoment bei der Kreisbewegung entspricht in vieler Hinsicht der Masse bei einer geraden Bewegungen, siehe Tabelle 6.1.

#### 6.5.4. Rotationsenergie $E_{\text{rot}}$

Um einen Körper auf einer Kreisbahn zu beschleunigen, muss eine Arbeit verrichtet werden, die in Form von kinetischer Energie in dem System gespeichert wird. Die kinetische Energie eines Körpers auf einer Geraden haben wir bereits kennengelernt:

$$E = \frac{m}{2} v^2$$

Wir setzen für die Geschwindigkeit  $v$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ein:

$$E = \frac{m}{2} (r \omega)^2 = \frac{m r^2}{2} \omega^2$$

Der Zähler des Bruchs entspricht dem Trägheitsmoment  $J$ , so dass wir für die *Rotationsenergie*  $E_{\text{rot}}$  schreiben können:

$$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2 \quad (6.25)$$

Wir führen hier bereits den Begriff der Rotation ein, den wir aber erst später ausführlicher behandeln.

#### 6.5.5. Drehimpuls $L$

Der *Drehimpuls* entspricht dem Impuls auf einer Kreisbahn. Umgangssprachlich kann auch von der *Wucht in der Drehung* oder dem *Drall* gesprochen werden. Der Drehimpuls erhält das Formelzeichen  $L$  und wird in *Newtonmetersekunde*, kurz Nms oder *Joulesekunde*, kurz Js gemessen:

$$[L] = \text{Nms} = \text{Js} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

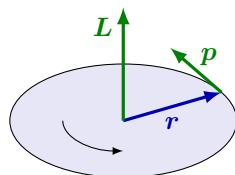


Abbildung 6.14.: Der Drehimpuls.

Wurde ein Massepunkt, der um ein Zentrum rotiert, mit einem Drehmoment  $M$  für eine Zeit  $t$  beschleunigt, so erhält dieser Körper ein Drehmoment  $L$  von:

$$L = Mt$$

Da sich das Drehmoment über die Zeit ändern kann, drücken wir den Zusammenhang durch ein Integral aus und bilden die Umkehrung:

$$L = \int M dt \quad (6.26)$$

$$M = \frac{dL}{dt} = \dot{L} \quad (6.27)$$

Wie ist der Zusammenhang zwischen Impuls  $p$  und Drehimpuls  $L$ ? Wir suchen den Drehimpuls  $L$  als Funktion des Impulses  $p$  bei gegebenem Radius  $r$ . Wir gehen zunächst von einem Massepunkt der Masse  $m$  aus, der mit einem konstanten Radius um ein Zentrum auf einer Ebene rotiert. Für den Betrag des Drehimpulses  $L$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} L &= \int M dt = \int |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| dt \\ &= \int r F dt = r \int F dt = rp \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Winkels zwischen dem Radius  $\mathbf{r}$  und dem Impuls  $\mathbf{p}$  folgt allgemein:

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (6.28)$$

Als nächstes wollen wir den Drehimpuls  $L$  als Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  herleiten. Wir betrachten wieder einen Massepunkt der Masse  $m$ , der um eine Achse mit konstantem Radius  $r$  mit Impuls  $p$  rotiert:

$$L = rp = r mv = rm \omega r = mr^2 \omega = J \omega$$

Im letzten Schritt haben wir Masse und Radius durch das Trägheitsmoment  $J$  ersetzt. Allgemein schreiben wir:

$$L = J \omega \quad (6.29)$$

#### 6.6. Drehimpulserhaltungssatz

Ein weiterer elementarer Erhaltungssatz in der Physik ist der *Drehimpulserhaltungssatz*. Er besagt, dass in einem geschlossenen System ohne von außen einwirkende Kräfte die Summe aller Drehimpulse um einen Punkt konstant ist:

$$\sum_i \mathbf{L}_i = \text{konstant} \quad (6.30)$$

Beispiel: Auf Kinderspielplätzen gibt es häufig ein Karussell, auf denen die Kinder Platz nehmen, und dass von anderen Kindern oder den Eltern angeschoben wird. Befindet sich das Karussell in einem guten Zustand, so wird es nach dem Antrieben noch lange rotieren, bevor es wieder zu Stillstand kommt. Wenn in dieser Phase sich die Kinder in Richtung der Mitte des Karussells bewegen, so bewegt sich das Karussell schneller. Grund ist, dass das Trägheitsmoment der Kinder durch den reduzierten Radius abnimmt und zum Erhalt des Drehimpulses die Winkelgeschwindigkeit zunehmen muss.

Wir betrachten eine Kugel, die an einem Faden der Länge  $l_1$  um einen Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  rotiert, siehe Abbildung 6.15. Wird während dieser Bewegung die Fadenlänge auf  $l_2$  geändert, ändert sich die Winkelgeschwindigkeit um:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{L/J_2}{L/J_1} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{m l_1^2}{m l_2^2} = \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2$$

Die Geschwindigkeit  $v$  der Kugel ändert sich um:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 l_2}{\omega_1 l_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{l_2}{l_1} = \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1}{l_2}$$

Woher kommt die Änderung der Geschwindigkeit der Kugel? In dem Vorgang der Änderung der Fadenlänge wirkt die Kraft nicht mehr quer zur Bewegung, so dass eine Beeinflussung der Geschwindigkeit erfolgt. Zudem wird eine Energie beim Verkürzen des Fadens in das System gegeben bzw. beim Verlängern des Fadens entnommen, die in Summe mit der kinetischen Energie der Kugel konstant sein muss.

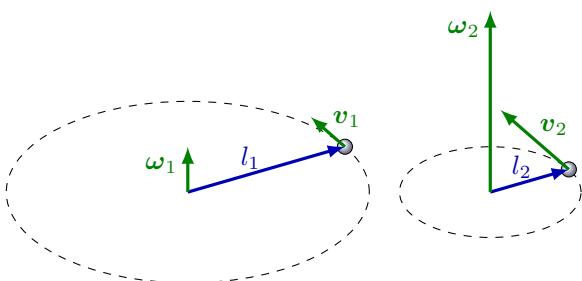


Abbildung 6.15.: Bei Änderung der Fadenlänge  $l$  ändern sich Geschwindigkeit  $v$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Kugel.

Der Drehimpulserhaltungssatz wird uns bei den starren Körpern intensiver begegnen, da hier ein betrachtetes Objekt selbst einen Drehimpuls erhält. Dazu später mehr.

## 6.7. Aufgaben

**Aufgabe 6.1:** Ein PKW mit einem Gewicht von 1 t fährt mit 90 km/h auf der Landstraße. Welchen Impuls hat der PKW?

**Aufgabe 6.2:** Ein Körper mit Masse 10 kg wurde mit einer Kraft von 10 N für 5 s beschleunigt. Bestimmen Sie Impuls und kinetische Energie des Körpers.

**Aufgabe 6.3:** Ein Objekt mit Masse 6 kg bewegt sich mit einer kinetischen Energie von 3 J und wird mit einem Stoß von 6 Ns in Bewegungsrichtung beschleunigt. Bestimmen Sie Impuls, Energie und Geschwindigkeit nach dem Stoß.

**Aufgabe 6.4:** Eine Billardkugel mit Masse 170 g werde durch den Queue (Spielstock zum Stoßen der Billardkugeln) auf 10 m/s beschleunigt. a) Bestimmen Sie den Impuls der Kugel. b) Nehmen wir an, der Stoß habe 20 ms gedauert, welche mittlere Kraft hat in dieser Zeit die Kugel beschleunigt?

**Aufgabe 6.5:** Ivo Karlović gelang es März 2011 beim Davis-Cup in Zagreb einen Tennisball beim Aufschlag auf 251,4 km/h zu beschleunigen. Angenommen der Tennisball wog 57 g, welcher Impuls wurde an den Ball übertragen?

**Aufgabe 6.6:** Rein theoretisch: Sie schießen einen Fußball der Masse 430 g mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h gegen das Heck eines stehenden PKWs mit Masse 1 t. Ausgehend von einem elastischen Stoß, wie schnell bewegt sich der PKW nach dem Stoß?

**Aufgabe 6.7:** Ein PKW mit Masse 1200 kg fährt mit 50 km/h auf einer Landstraße und wird von hinten durch einen LKW mit 16 t Masse und Geschwindigkeit 70 km/h angefahren. Ausgehend von einem unelastischen Stoß, wie schnell fahren die beiden Fahrzeuge unmittelbar nach der Kollision?

**Aufgabe 6.8:** Angenommen, der Mond mit seiner Masse von  $7,349 \cdot 10^{22}$  kg würde mit einer Geschwindigkeit von 1,023 km/s auf die Erde mit Masse  $5,974 \cdot 10^{24}$  kg entgegen ihrer Bewegung prallen und von ihr vollständig absorbiert, um wieviel Prozent würde sich die derzeitige Geschwindigkeit der Erde (29,78 km/s) abnehmen? Skizzieren Sie die Aufgabe vor und nach dem Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem.

**Aufgabe 6.9:** Ein 9 mm Projektil mit Masse 7,5 g bringe ein ballistisches Pendel mit Masse 2 kg und 100 cm Pendellänge zu einem Ausschlag von  $27,6^\circ$ . Wie schnell war das Projektil?

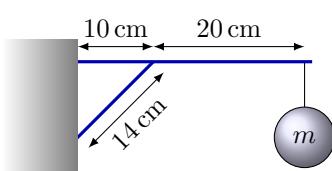
**Aufgabe 6.10:** Sie legen drei Münzen gleicher Masse mit kleinen Lücken in einer Reihe auf den Tisch und schießen eine vierte Münze auf das eine Ende der Reihe, siehe Abbildung.



a) Wie ist die Geschwindigkeit aller vier Münzen nach den sich ergebenden Stößen? b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Schwerpunktsystem? c) Skizzieren Sie die Aufgabe im Schwerpunktsystem vor und nach den Stößen.

**Aufgabe 6.11:** Eine Bohrmaschine habe eine maximale Drehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute, die sie bei konstanter Beschleunigung in 1,2 s erreicht. Bestimmen Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.

**Aufgabe 6.12:** Sie haben an der Wand das gezeigte Gestänge montiert. Sie hängen am rechten Ende der horizontalen Stange eine Masse von 5 kg auf. Die höchste Belastung für die horizontale Stange tritt an der Verbindungsstelle der beiden Stangen auf.



Bestimmen Sie das Drehmoment an dieser Stelle.

**Aufgabe 6.13:** Eine Kugel mit Masse 500 g rotiere mit 4 m/s an einem 20 cm Faden. Bestimmen Sie Win-

kelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Drehimpuls und Energie des Systems.

**Aufgabe 6.14:** Ein Körper mit 1 kg Masse fliege mit 3 m/s auf einer geraden Bahn. Welchem Drehimpuls und Trägheitsmoment entspricht das bezogen auf einen 20 cm neben der Bahn gelegenen Punkt?

**Aufgabe 6.15:** Ein Stein mit Masse 200 g wird an einem 1 m langen Faden um eine horizontale Drehachse geschleudert, so dass sich ein Drehimpuls von 2 Js ergibt. Wenn der Stein plötzlich losgelassen wird, wie hoch könnte er maximal fliegen?

**Aufgabe 6.16:** Ein Stein mit 1 kg Masse (kann als Massenpunkt angenommen werden) rotiere an einem (masselosen) Faden mit einem Radius von 1 m mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $1\text{ s}^{-1}$ . Wie schnell rotiert der Stein, wenn der Faden auf 0,5 m reduziert wird? Verluste können vernachlässigt werden.

**Aufgabe 6.17:** Ein Kinderkarussell auf einem Spielplatz habe mit den bereits darauf sitzenden Kindern zunächst ein Trägheitsmoment von  $100\text{ kg m}^2$  und drehe sich mit einer Umdrehung pro 3 s. Plötzlich springt ein Kind mit 25 kg Körpergewicht (ohne vorherige Winkelgeschwindigkeit) auf das Karussell und setzt sich 1 m entfernt von der Drehachse hin. Wie groß ist jetzt das Trägheitsmoment und wie schnell dreht sich das Karussell?

**Aufgabe 6.18:** Ein Kreisel werde für 10 s mit einem Drehmoment von 10 Ncm auf 3 000 Umdrehungen pro Minute beschleunigt. Unter Vernachlässigung von Reibungseffekten, wie groß ist das Trägheitsmoment des Kreisels?

# 7. Schwingungen

## 7.1. Definition von Schwingungen

Allgemein spricht man von einer *Schwingung*, wenn sich eine physikalische Größe mit der Zeit periodisch ändert. Ob es sich um die Bewegung einer Gitarrensaite, das Schwanken eines Wolkenkratzers, die Trägerfrequenz eines Senders, das Lineal an der Tischkante, das Schaukeln eines Kindes (oder Erwachsenen) handelt, immer haben wir es mit Schwingungen zu tun. Ein Leben ohne Schwingungen wäre undenkbar. (Ein Exkurs in Richtung Schwingungen und Rhythmen im Leben soll hier nicht erfolgen, ist aber zweifelsohne ein interessantes Themengebiet.) Man spricht auch dann von einer Schwingung, wenn sich die Größe des Signals, das ist die *Amplitude*, von Periode zu Periode verändert. Eine angeschlagene Saite schwingt aufgrund von Verlusten mit abnehmender Amplitude; sie ‘klingt aus’. Hier noch einmal zusammengefasst:

*Eine Schwingung ist ein zeitlich sich periodisch ändernder Wert einer physikalischen Größe.*

## 7.2. Prinzipielle Arbeitsweise von Schwingungen

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf mechanische Schwingungen. Voraussetzung für eine mechanische Schwingung ist das geeignete Zusammenspiel zwischen Trägheitskraft und Rückstellkraft. Betrachten Sie Abbildung 7.1, in der sich Kugeln an verschiedenen Stellen einer unebenen Landschaft befinden. Im Fall a) kann die Kugel seitlich verschoben werden, ohne dass sie in der neuen Position eine Kraft erfährt. Wird die Kugel b) seitlich verschoben, so erfährt sie in ihrer neuen Position eine seitliche Kraft, die sie aber nicht in ihre ursprüngliche Position zurückzieht, sondern weiter von ihr entfernt. Schließlich führt eine seitliche Verschiebung der Kugel c) dazu, dass eine Kraft entsteht, die sie in ihre ursprüngliche Lage zurückzieht. Man spricht von einer *Rückstellkraft*.

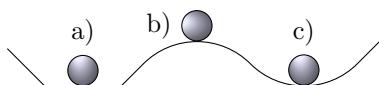


Abbildung 7.1.: Nur Kugel c) hat die Möglichkeit in Schwingung zu geraten.

Was passiert, wenn die Kugel c) in Abbildung 7.1 seitlich angestoßen wird? Wir gehen von einer symmetrischen Mulde aus und vernachlässigen jegliche Reibungsverluste. Die Zeit wird vom Zeitpunkt nach dem Stoß gezählt, positive Werte werden nach rechts aufgetragen.

t	s(t)	v(t)	a(t)	
0	0	$\hat{v}$	0	
$T/4$	$\hat{s}$	0	$-\hat{a}$	
$T/2$	0	$-\hat{v}$	0	
$3T/4$	$-\hat{s}$	0	$\hat{a}$	
T	0	$\hat{v}$	0	

Tabelle 7.1.: Phasen einer Schwingung.

Direkt nach dem Stoß ( $t = 0$ ) befindet sich die Kugel noch in ihrer Ruhelage  $s(0) = 0$ , sie nimmt ihre maximale Geschwindigkeit in positiver Richtung an  $v(0) = \hat{v}$  und sie wird nicht beschleunigt  $a(0) = 0$ . Der dann folgende Ablauf der Schwingung ist in Tabelle 7.1 dargestellt. Nach einer Zeit  $t = T$  befindet sich die Kugel wieder in ihrem Ausgangszustand direkt nachdem sie angestoßen wurde und der Zyklus beginnt von vorne.

## 7.3. Ungedämpfte harmonische Schwingung

Ist bei einer Schwingung die Rückstellkraft proportional zur Verschiebung von der Ruhelage, so gleicht der zeitliche Verlauf einer Sinusschwingung und man spricht von einer *harmonischen Schwingung*.

Ein Schwingkreis ohne Verluste schwingt (ohne Antrieb) unendlich lange und ohne Verringerung der Amplitude. Man spricht von der *ungedämpften Schwingung*. Aber auch Schwingkreise, bei denen sich Antrieb und Verluste die Waage halten, werden als ungedämpft bezeichnet. An ungedämpften Schwingungen lassen sich die wesentlichen Eigenschaften von Schwingungen gut erläutern.

Es folgt zunächst die mathematische Herleitung der ungedämpften harmonischen Schwingung. Danach werden einige Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen betrachtet.

### 7.3.1. Herleitung ungedämpfter harmonischer Schwingungen

Für die Herleitung der ungedämpften harmonischen Schwingung betrachten wir einen Schwingkreis bestehend aus einer Masse  $m$  und einer Feder mit Federkonstante  $D$ .

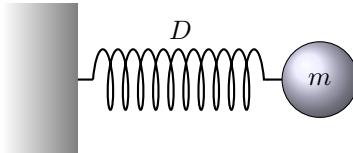


Abbildung 7.2.: Prinzipieller Aufbau eines ungedämpften mechanischen Schwingkreises.

Zunächst betrachten wir die Rückstellkraft, welche proportional zur Auslenkung der Feder von der Ruheposition ist. Der Betrag des Faktors zwischen Auslenkung und Rückstellkraft ist die Federkonstante  $D$ . Das negative Vorzeichen in der folgenden Gleichung deutet die Kraftrichtung entgegengesetzt zur Auslenkung an.

$$F_R = -Ds(t)$$

Wird eine Masse beschleunigt, so wirkt die Trägheitskraft der Beschleunigung entgegen. Der Betrag des Faktors zwischen Beschleunigung und Trägheitskraft ist die Masse  $m$ . Die Beschleunigung ist dabei der zweiten Ableitung der Position gleich.

$$F_T = -ma(t) = -m \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

Die Summe von Rückstellkraft und Trägheitskraft muss zu allen Zeiten null ergeben.

$$Ds(t) + m \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0$$

Wir erhalten eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in impliziter Form. Der Einfachheit halber lassen wir die Angabe der Unabhängigen ( $t$ ) weg und notieren die zweite Ableitung nach der Zeit durch zwei Punkte  $\ddot{s}$ .

$$Ds + m\ddot{s} = 0 \quad (7.1)$$

Die entstandene Differentialgleichung (7.1) lässt sich mit einer allgemeinen Sinusfunktion lösen. Wir verwenden folgenden Ansatz:

$$s = \hat{s} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (7.2)$$

Die Amplitude wird durch die Konstante  $\hat{s}$ , der Nullphasenwinkel durch  $\varphi_0$  und die Kreisfrequenz durch  $\omega$  wiedergegeben. Wir bilden die ersten zwei Ableitungen der Ansatzfunktion:

$$\dot{s} = \hat{s}\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{s} = -\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Diesen Ansatz setzen wir in die zuvor gewonnene Differentialgleichung ein:

$$D\dot{s} \sin(\omega t + \varphi_0) - m\ddot{s}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Es folgt:

$$D = m\omega^2$$

und schließlich:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (7.3)$$

Die anderen beiden Konstanten der Ansatzfunktion  $\hat{s}$  und  $\varphi_0$  ergeben sich durch die Startbedingungen. Nehmen wir an, die Masse wurde zum Zeitpunkt  $t = 0$  um  $s_0$  ausgelenkt und dann losgelassen, so ergeben sich die folgenden Startbedingungen:

$$\begin{aligned} s(0) &= s_0 \\ v(0) &= \dot{s}(0) = 0 \end{aligned}$$

Das lässt sich mit  $\varphi_0 = \pi/2$  und  $\hat{s} = s_0$  lösen. Mit  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$  ergibt sich schließlich:

$$s = s_0 \cos(\omega t)$$

Die Rechnung zeigt, dass der gewählte Ansatz (7.2) eine allgemeine Lösung für eine ungedämpfte Schwingung darstellt. Folgender komplexer Ansatz führt ebenfalls zum Ziel:

$$s = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (7.4)$$

Bei dieser Variante ist im Ergebnis nur der Realteil von Interesse und spiegelt die Eigenschaft der Schwingung wieder.

### 7.3.2. Dynamische Verläufe einer harmonischen Schwingung

Ein schwingender Körper hat eine Position  $s$ , eine Geschwindigkeit  $v$  und wird mit  $a$  beschleunigt. Diese drei sind proportional zur negativen Rückstellkraft  $-F_R$ , zum Impuls  $p$  und zur negativen Trägheitskraft  $-F_T$ . Die Feder hat eine potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$ , der Körper eine kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  und zwischen Feder und Masse findet ein Energietransfer in Form von potentieller und kinetischer Leistung  $P_{\text{pot}}$  und  $P_{\text{kin}}(t)$  statt.

Alle genannten Größen sind in Abbildung 7.3 zusammengefasst und zeitlich dargestellt. Hervorzuheben ist das Zusammenspiel zwischen der kinetischer Energie der schwingenden Masse  $E_{\text{kin}}$  und der potentiellen Energie der Feder  $E_{\text{pot}}$ . Die Summe beider Energien ist konstant, aber es findet ein reger Energietransfer zwischen Masse und Feder statt, was durch die Leistungsverläufe  $P_{\text{kin}}$  und  $P_{\text{pot}}$  dargestellt wird.

### 7.3.3. Kenngrößen ungedämpfter Schwingungen

Ausgehend von dem Lösungsansatz in Abschnitt 7.3.1,  $s = \hat{s} \sin(\omega t + \varphi_0)$ , ergeben sich folgende Kenngrößen:

**Periode  $T$ .** Die *Periode* oder *Periodendauer*, gemessen in  $s$ , ist die Zeit, die für einen Schwingungszyklus benötigt wird.

**Frequenz  $f$ .** Die *Frequenz*, gemessen in  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ , ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit. Die Frequenz ist der Kehrwert der Periode:

$$f = \frac{1}{T} \quad (7.5)$$

Größe	allgemein	harmonisch ungedämpft
$s(t)$	-	$\hat{s} \sin(\omega t)$
$v(t)$	$\dot{s}(t)$	$\hat{v} \cos(\omega t) = \hat{s}\omega \cos(\omega t)$
$p(t)$	$mv(t)$	$\hat{p} \cos(\omega t) = m\hat{s}\omega \cos(\omega t)$
$a(t)$	$\ddot{s}(t)$	$-\hat{a} \sin(\omega t) = -\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t)$
$F_R(t)$	$-Ds(t)$	$-\hat{F}_R \sin(\omega t) = -D\hat{s} \sin(\omega t)$
$F_T(t)$	$-ma(t)$	$\hat{F}_T \sin(\omega t) = m\hat{s}\omega^2 \sin(\omega t)$
$E_{\text{pot}}(t)$	$\frac{D}{2}s^2(t)$	$\frac{D}{2}\hat{s}^2 \sin^2(\omega t)$
$E_{\text{kin}}(t)$	$\frac{m}{2}v^2(t)$	$\frac{m}{2}\hat{s}^2\omega^2 \cos^2(\omega t)$
$P_{\text{pot}}(t)$	$\dot{E}_{\text{pot}}(t)$	$\frac{D}{2}\hat{s}^2\omega \sin(2\omega t)$
$P_{\text{kin}}(t)$	$\dot{E}_{\text{kin}}(t)$	$-\frac{m}{2}\hat{s}^2\omega^3 \sin(2\omega t)$

Tabelle 7.2.: Kenngrößen harmonischer Schwingungen.

**Kreisfrequenz  $\omega$ .** Die *Kreisfrequenz*, gemessen in  $\text{s}^{-1}$ , ist proportional zur Frequenz und misst den Winkel in Bogenmaß, den eine Sinusschwingung pro Zeiteinheit zurücklegt. Es ergibt sich der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (7.6)$$

**Nullphasenwinkel  $\varphi_0$ .** Der *Nullphasenwinkel* bezeichnet die Phase der Sinusschwingung zum Zeitpunkt null.

Für alle dynamischen Größen gibt es folgende charakteristische Kennzahlen:

**Spitzen-/Scheitelwert  $\hat{x}$ .** Der *Spitzen-* bzw. *Scheitelwert* gibt den maximal auftretenden Wert an. Bei Signalen, die um den Nullwert herum schwingen, ist damit der maximale Betrag gemeint.

**Arithmetischer Mittelwert  $\bar{x}$ .** Der *arithmetische Mittelwert*, oder einfach nur *Mittelwert* steht für den zeitlichen Mittelwert einer Schwingung:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (7.7)$$

Streng genommen ergibt sich für symmetrisch um den Nullwert oszillierende Signale bei einer vollen Periode bzw. bei einem ganzzahligen Vielfachen einer Periode immer der Wert null. Deshalb ist häufig mit Mittelwert das Integral über den *Betrag* einer Schwingung gemeint:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (7.8)$$

Bezogen auf eine Sinusschwingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{sin}} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x} \sin(\omega t)| dt = \frac{2\hat{x}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2\hat{x}}{\pi} = 0,637\hat{x} \end{aligned}$$

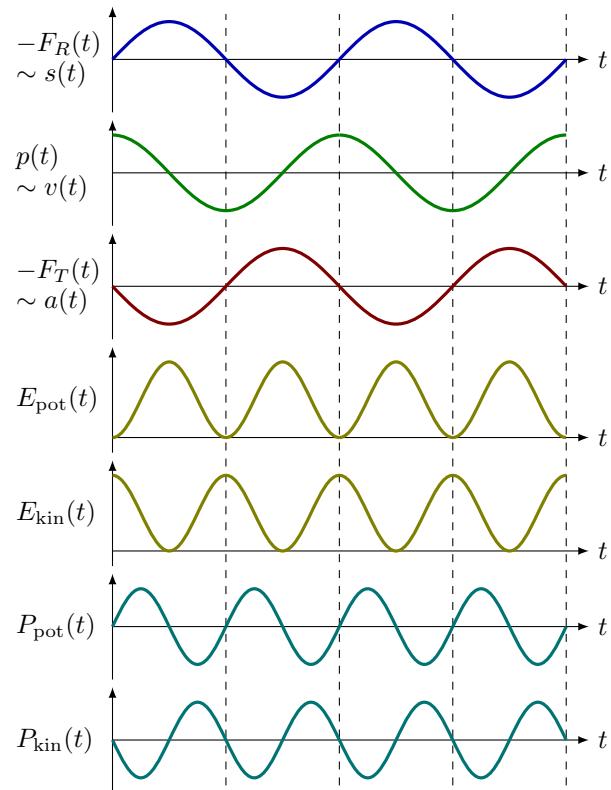


Abbildung 7.3.: Dynamische Verläufe einiger Größen einer harmonischen Schwingung.

**Quadratischer Mittelwert  $\tilde{x}$ .** Der *quadratische Mittelwert*, auch *Effektivwert* oder *RMS-Wert* (*root mean square*) genannt, ist im Bezug auf Energie und Leistung von Schwingungen von Bedeutung. Die Bedeutung des englischen Namens *RMS* (*Wurzel-Mittelwert-Quadrat*) deutet die Berechnung an:

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (7.9)$$

Bezogen auf eine Sinusschwingung ergibt sich:

$$\tilde{x}_{\text{sin}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{x}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} = 0,707\hat{x}$$

## 7.4. Gedämpfte, harmonische Schwingungen

Unsere bisherige Betrachtung galt den ungedämpften Schwingungen. Nun sind aber in der Realität schwingende Systeme mit Verlusten behaftet, was ohne Antrieb zum Abklingen der Amplitude führt. In diesem Abschnitt gehen wir näher auf diese gedämpften Schwingkreise ein.

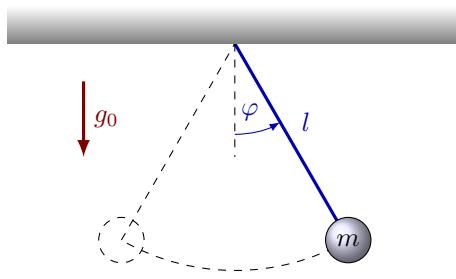
### 7.4.1. Herleitung der gedämpften harmonischen Schwingung

Wir betrachten einen mechanischen Schwingkreis mit den Elementen Masse, Feder und *Schwingungsdämpfer*

## Anwendung 7.1: Mathematisches Pendel

Ein *Pendel* besteht aus einer Masse, die an einem Faden oder einer Stange an einem Drehpunkt befestigt ist. Wird das Pendel seitlich ausgelenkt, so kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen Masse und Erdanziehungskraft, welche das Pendel zum Schwingen bringt.

Beim *mathematischen* Pendel handelt es sich um eine Idealisierung eines realen Pendels in zweierlei Hinsicht: Erstens, jegliche Art von Reibung wird vernachlässigt. Zweitens, die Masse  $m$  wird als ein Massenpunkt betrachtet, der sich mit Abstand  $l$  zum Aufhängepunkt bewegt.



Da die Masse durch den Faden auf eine Kreisbahn gezwungen wird, kann die Erdbeschleunigung die Masse nur tangential beschleunigen:

$$a = -g_0 \sin \varphi$$

Wir betrachten die Winkelbeschleunigung  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{a}{l} = -\frac{g_0}{l} \sin \varphi$$

Gleichzeitig entspricht die Winkelbeschleunigung der zweiten Ableitung des Winkels:

$$\alpha = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Wir fügen die beiden Gleichungen zusammen und erhalten eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g_0}{l} \sin \varphi$$

Wir betrachten nur eine kleine Auslenkung ( $\dot{\varphi} < 5^\circ \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$ ) und nähern uns einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g_0}{l} \varphi$$

Die Gleichung lässt durch eine harmonische Schwingung lösen:

$$\varphi = \hat{\varphi} \sin(\omega t + \gamma)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  ergibt sich mit:

$$\omega = \sqrt{\frac{g_0}{l}}$$

Die Amplitude  $\hat{\varphi}$  und der Nullphasenwinkel  $\gamma$  ergeben sich durch die Startbedingungen.

Etwas später im Skript gehen wir auf das physikalische Pendel ein, dass die Annahme der punktförmigen Masse verlässt und von einem starren Körper ausgeht.

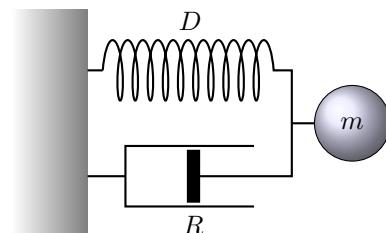


Abbildung 7.4.: Prinzipieller Aufbau eines gedämpften mechanischen Schwingkreises.

folgt

$$-ma(t) - kv(t) - Ds(t) = 0$$

Mit  $a(t)$  als der zweiten, und  $v(t)$  als der ersten Ableitung von  $s(t)$  folgt schließlich eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung in impliziter Form:

$$m\ddot{s} + ks + Ds = 0 \quad (7.10)$$

Als Ansatz wählen wir Gleichung (7.4)  $\hat{s}e^{i(\omega t + \varphi_0)}$  multipliziert mit einem Abklingfaktor  $e^{-\delta t}$  mit der *Abklingkonstante*  $\delta$ . Wir bilden die erste und zweite Ab-

Mit

$$F_T = -ma(t)$$

$$F_V = -\frac{v(t)}{R} = -kv(t)$$

$$F_R = -Ds(t)$$

leitung.

$$\begin{aligned}s &= \hat{s}e^{i(\omega t+\varphi_0)}e^{-\delta t} = \hat{s}e^{i(\omega t+\varphi_0)-\delta t} \\ \dot{s} &= \hat{s}(i\omega - \delta)e^{i(\omega t+\varphi_0)-\delta t} = (i\omega - \delta)s \\ \ddot{s} &= \hat{s}(i\omega - \delta)^2e^{i(\omega t+\varphi_0)-\delta t} = (i\omega - \delta)^2s\end{aligned}\quad (7.11)$$

In die Differentialgleichung (7.10) eingesetzt folgt:

$$m(i\omega - \delta)^2s + k(i\omega - \delta)s + Ds = 0$$

Nach Trennung des Real- und Imaginärteils lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad (7.12)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \quad (7.13)$$

Die gefundene Lösung ergibt nur dann ein sinnvolles Ergebnis, wenn der Betrag unter der Wurzel nicht negativ ist. Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so muss ein anderer Ansatz gewählt werden:

$$\begin{aligned}s &= x_1 e^{-\alpha_1 t} + x_2 e^{-\alpha_2 t} \\ \dot{s} &= -x_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} - x_2 \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \\ \ddot{s} &= x_1 \alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} + x_2 \alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}\end{aligned}\quad (7.14)$$

Eingesetzt in die DGL (7.10) ergibt sich für die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ :

$$\alpha_{1,2} = \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m}} \quad (7.15)$$

Diese Lösung hat in der Wurzel den gleichen Ausdruck wie (7.13) nur mit umgekehrtem Vorzeichen und stellt damit eine sinnvolle Ergänzung dar. Die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen von Position  $s_0$  und Geschwindigkeit  $v_0$ :

$$\begin{aligned}s(0) &= s_0 = x_1 + x_2 \\ \dot{s}(0) &= v_0 = -x_1 \alpha_1 - x_2 \alpha_2\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{v_0 + s_0 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ x_2 &= \frac{v_0 + s_0 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\end{aligned}$$

#### 7.4.2. Diskussion der Ergebnisse

Die erste Lösung besteht aus einem Term der oszilliert, und einem anderen, der die Dämpfung verursacht, siehe Abbildung 7.5. Die Amplitude nimmt von Schwingung zu Schwingung um das Dämpfungsverhältnis  $K$  ab. Nach einer langen Zeit kann nur noch rechnerisch eine Schwingung beobachtet werden. Bei Messungen wird nach einer Weile die Schwingung im allgemeinen Rauschen untergehen.

Wird der Schwingkreis stark gedämpft, so bleibt ein Schwingen aus, siehe Abbildung 7.6. Je nach Anfangsbedingung kann maximal ein Überschwingen beobachtet werden. Der Fall tritt ein, wenn der schwingenden Masse eine Anfangsgeschwindigkeit zugefügt wird, siehe untere Kurve in Abbildung 7.6.

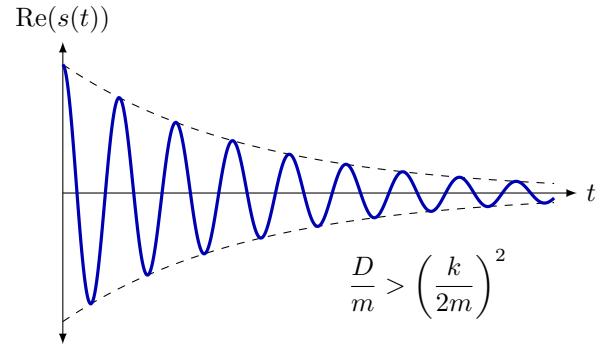


Abbildung 7.5.: Gedämpfte Schwingung mit wenig Verlusten.

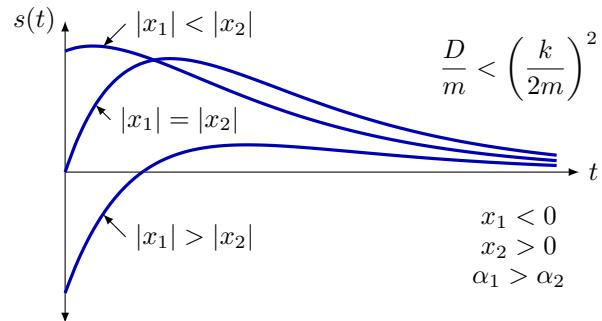


Abbildung 7.6.: Gedämpfte Schwingung mit hohen Verlusten.

#### 7.4.3. Kenngrößen gedämpfter Schwingungen

Bei den ungedämpften Schwingungen haben wir im Abschnitt 7.3.3 bereits einige Kenngrößen von Schwingungen kennengelernt. Für gedämpfte Schwingungen gibt es noch weitere:

**Reibungskonstante  $R$ .** Ein Schwingungsdämpfer wird durch die *Reibungskonstante* charakterisiert. Sie gibt das Verhältnis der Geschwindigkeit  $v$  zur negativen Verlustkraft des Schwingungsdämpfers  $F_V$  an. Sie erhält das Formelzeichen  $R$  und wird in m/Ns gemessen.

$$R = -\frac{v}{F_V} \quad (7.16)$$

**Dämpfungskonstante  $k$ .** Das Verhältnis der Verlust- bzw. Dämpfungskraft  $F_V$  zur negativen Geschwindigkeit  $v$  wird durch die *Dämpfungskonstante* angegeben. Sie trägt das Formelzeichen  $k$  und wird in Ns/m gemessen. Mit  $F_V = -kv(t)$  folgt:

$$k = -\frac{F_V}{v} = \frac{1}{R} \quad (7.17)$$

**Abklingkonstante  $\delta$ .** Die *Abklingkonstante*  $\delta$ , gemessen in  $s^{-1}$ , ist der Koeffizient der Exponentialfunktion, welche das Abklingen der Schwingung widerspiegelt, und gibt die Geschwindigkeit des Abklingvorgangs an.

$$s(t) = \hat{s}e^{i(\omega t+\varphi_0)-\delta t}$$

Mit  $\hat{s}_a$  und  $\hat{s}_b$  als die Scheitelwerte zu den Zeitpunkten  $t_a$  und  $t_b$  folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{s}_b}{\hat{s}_a} &= e^{-\delta(t_b-t_a)} \\ \delta &= \frac{1}{t_b-t_a} \ln \frac{\hat{s}_a}{\hat{s}_b}\end{aligned}\quad (7.18)$$

**Dämpfungsverhältnis  $K$ .** Faktor, um den die Amplitude einer gedämpften Schwingung innerhalb einer Periode fällt. Es ist das Verhältnis der Amplitude einer Periode zur Amplitude der nächsten Periode. Es erhält das Formelzeichen  $K$  und es wird keine Einheit verwendet.

$$K = \frac{\hat{s}_n}{\hat{s}_{n+1}} \quad (7.19)$$

**Dämpfungsgrad  $\vartheta$ .** Der *Dämpfungsgrad* ist ein Maß für die Abklingkonstante  $\delta$  relativ zur ungedämpften Kreisfrequenz  $\omega_0$ . Er erhält das Formelzeichen  $\vartheta$  und hat keine Einheit.

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (7.20)$$

## 7.5. Erzwungene Schwingung

### 7.5.1. Herleitung der erzwungenen Schwingung

Als nächstes wollen wir eine gedämpfte Schwingung mit Antrieb betrachten. Wieder finden wir die drei Elemente *Feder*, *Schwingungsdämpfer* und *Masse* aus Abschnitt 7.4.1. Hinzu kommt ein *Antrieb*, der zwischen Feder und Wand eingefügt ist. Er dehnt sich zyklisch mit der Funktion  $s_A = \hat{s}_A \cos(\omega t)$  und beeinflusst die Rückstellkraft,  $F_R$ .

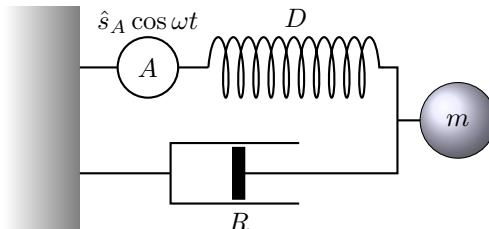


Abbildung 7.7.: Prinzipieller Aufbau eines gedämpften Schwingkreises mit Antrieb.

Wir nehmen die Differentialgleichung aus Abschnitt 7.4.1 und fügen den Antrieb ein.

$$m\ddot{s} + k\dot{s} + D(s - s_A) = 0$$

$$m\ddot{s} + k\dot{s} + Ds = Ds_A$$

Wir ersetzen  $D\hat{s}_A$  durch  $\hat{F}_A$  (Scheitelwert der Antriebskraft) und die Kosinusfunktion  $\cos(\omega t)$  durch die komplexe Frequenz  $e^{i\omega t}$ . Es ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$m\ddot{s} + k\dot{s} + Ds = \hat{F}_A e^{i\omega t} \quad (7.21)$$

Uns interessiert nur der eingeschwungene Zustand dieser inhomogenen Differentialgleichung und wir wählen deshalb den Ansatz für eine ungedämpfte Schwingung. Da das System ausschließlich mit der Frequenz  $\omega$  angeregt wird, kann es auch nur mit dieser Frequenz schwingen.

$$s = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad (7.22)$$

$$\dot{s} = i\hat{s}\omega e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\ddot{s} = -\hat{s}\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}-m\hat{s}\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)} + ik\hat{s}\omega e^{i(\omega t + \varphi_0)} \\ + D\hat{s}e^{i(\omega t + \varphi_0)} &= \hat{F}_A e^{i\omega t} \\ -m\omega^2 + ik\omega + D &= \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} e^{-i\varphi_0}\end{aligned}$$

Mit  $e^{-i\varphi_0} = \cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0$  folgt:

$$\frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} (\cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0) = -m\omega^2 + ik\omega + D$$

$$\begin{aligned}\text{Re: } \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \cos \varphi_0 &= D - m\omega^2 \\ \text{Im: } \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \sin \varphi_0 &= -k\omega\end{aligned}$$

Teilt man den Imaginärteil durch den Realteil und ersetzt  $\frac{D}{m}$  durch  $\omega_0^2$  (siehe Abschnitt 7.3.1), so ergibt sich für den Nullphasenwinkel:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\omega k}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (7.23)$$

Zur Ermittlung des Scheitelwerts wird der Realteil weiter bearbeitet. Mit  $\cos(\varphi_0) = 1/\sqrt{1 + \tan^2(\varphi_0)}$  und  $D = m\omega_0^2$  folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \cos \varphi_0 &= D - m\omega^2 \\ \frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} &= m(\omega_0^2 - \omega^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\hat{F}_A}{\hat{s}} &= m(\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{1 + \frac{k^2 \omega^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \\ \hat{s} &= \frac{\hat{F}_A}{\sqrt{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2 \omega^2}}\end{aligned}\quad (7.24)$$

### 7.5.2. Diskussion der Ergebnisse

Aus Symmetriegründen betrachten wir zunächst den Scheitelwert der Geschwindigkeit  $\hat{v}$ , der sich aus dem Produkt von Scheitelwert der Position  $\hat{s}$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  ergibt:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt} \hat{s} \sin(\omega t) = \hat{s}\omega \cos(\omega t)$$

$$\hat{v} = \hat{s}\omega = \frac{\hat{F}_A\omega}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega^2}} \quad (7.25)$$

In Abbildung 7.8 ist der Scheitelwert der Geschwindigkeit als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen  $k$  aufgetragen. Für sehr geringe und sehr hohe Frequenzen geht die Geschwindigkeit gegen null. Irgendwo im mittleren Frequenzbereich befindet sich für die Geschwindigkeit ein Maximum. Wir suchen dieses Maximum durch Nullsetzung der ersten Ableitung:

$$\frac{d\hat{v}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{\hat{F}_A\omega}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega^2}} = 0 \quad (7.26)$$

Die maximale Geschwindigkeit wird bei der Frequenz  $\omega = \omega_0$  erreicht. An diesem Punkt befindet sich das System in *Resonanz*. Abhängig von der Dämpfung ist die Resonanz unterschiedlich stark ausgeprägt. Drei Fälle sind in Abbildung 7.8 dargestellt.

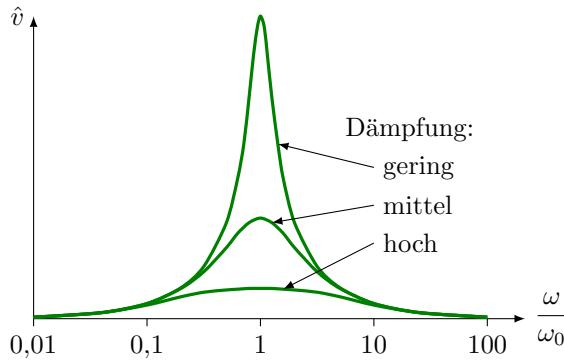


Abbildung 7.8.: Scheitelwert der Geschwindigkeit  $\hat{v}$  als Funktion der Kreisfrequenz.

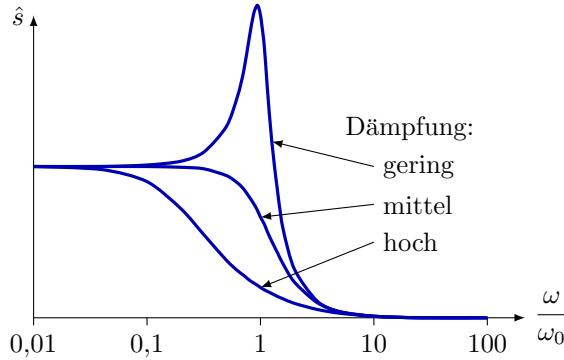


Abbildung 7.9.: Scheitelwert der Position  $\hat{s}$  als Funktion der Kreisfrequenz.

Der Scheitelwert der Position zeigt einen etwas anderen Verlauf, siehe Abbildung 7.9. Bei niedrigen Frequenzen gleicht sich der Scheitelwert der Position  $\hat{s}$  der Amplitude der Anregung  $\hat{s}_A$  an. Im Mittelbereich kommt es nur bei geringer Dämpfung zu einer Überhöhung. Bei hohen Frequenzen fällt die Amplitude schnell ab. Findet eine Überhöhung statt, so liegt

die Frequenz maximaler Überhöhung  $\omega_r$  etwas neben der ungedämpften Kreisfrequenz  $\omega_0$ :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2m^2}} \quad (7.27)$$

## 7.6. Überlagerung von Schwingungen

Schwingungen, die wir um uns herum beobachten, sind häufig eine Überlagerung von mehreren Schwingungen. Beispiel: Die Hand eines winkenden Kindes, dass auf einer Schaukel sitzt, erfährt eine überlagerte Schwingung: Einerseits wird die Hand durch die Muskeln des Kindes in Bewegung gebracht, zum anderen übt das ganze Kind eine Pendelschwingung aus.

Beim Resonanzboden meiner Gitarre überlagern sich bis zu sechs Teilschwingungen: Jede der sechs Saiten überträgt eine Schwingung auf den Resonanzboden. Dabei werden die einzelnen Töne vom Resonanzboden nicht örtlich getrennt wiedergegeben, sondern er schwingt mit der Summe aller Teilschwingungen.

Im Gegenzug ist es möglich, jede beliebige Kurvenform einer Schwingung in Teilschwingungen zu zerlegen. Dabei können für die Teilschwingungen verschiedene Kurvenformen gewählt werden.

Zum Beispiel wird beim Digitalisieren eines analogen Signals der Verlauf des Eingangssignals in eine Summe von einzelnen Rechteckimpulsen zerlegt, deren Höhen als Zahlen im Speicher abgelegt werden. Werden alle Rechteckimpulse später wieder aufaddiert, so ergibt sich in guter Näherung das ursprüngliche analoge Signal. (Will man das Digitalisieren mathematisch ausdrücken und verarbeiten, so verwendet man statt der Rechteckimpulse die unendlich hohen und unendlich schmalen Dirac-Impulse.)

Jede Form einer Schwingung kann in eine Summe von Sinuskurven zerlegt werden. Hat die Schwingung eine periodische Kurvenform mit der Frequenz  $f$ , so kann die Schwingung in Sinuskurven mit den Frequenzen  $f, 2f, 3f, 4f$  etc. zerlegt werden. Die einzelnen Sinuskurven unterscheiden sich in *Frequenz*, *Amplitude* und *Nullphasenwinkel*. Aufgrund der diskreten Frequenzen ergibt sich ein diskretes Frequenzspektrum. Das mathematische Verfahren zur Zerlegung einer periodischen Schwingung in Sinuskurven ist die Fourier-Analyse, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

Je nach Kurvenform der Schwingung werden mehr oder weniger Sinuskurven benötigt. Normalerweise legt man ein Abbruchkriterium fest, nach dem entschieden wird, wie viele Sinuskurven addiert werden.

In Abbildung 7.10 wird im ersten Diagramm die Summe von zwei Sinuskurven gezeigt. Die anderen drei Diagramme zeigen typische oberwellenreiche Kurvenformen (Dreieck, Rechteck und Sägezahn) und deren Näherungen.

Was bei der Zerlegung von Schwingungen gilt, kann auch für die Addition gesagt werden: Mehrere Schwingungen können beliebig addiert werden und ergeben eine neue Schwingung mit einer geänderten Kurvenform.

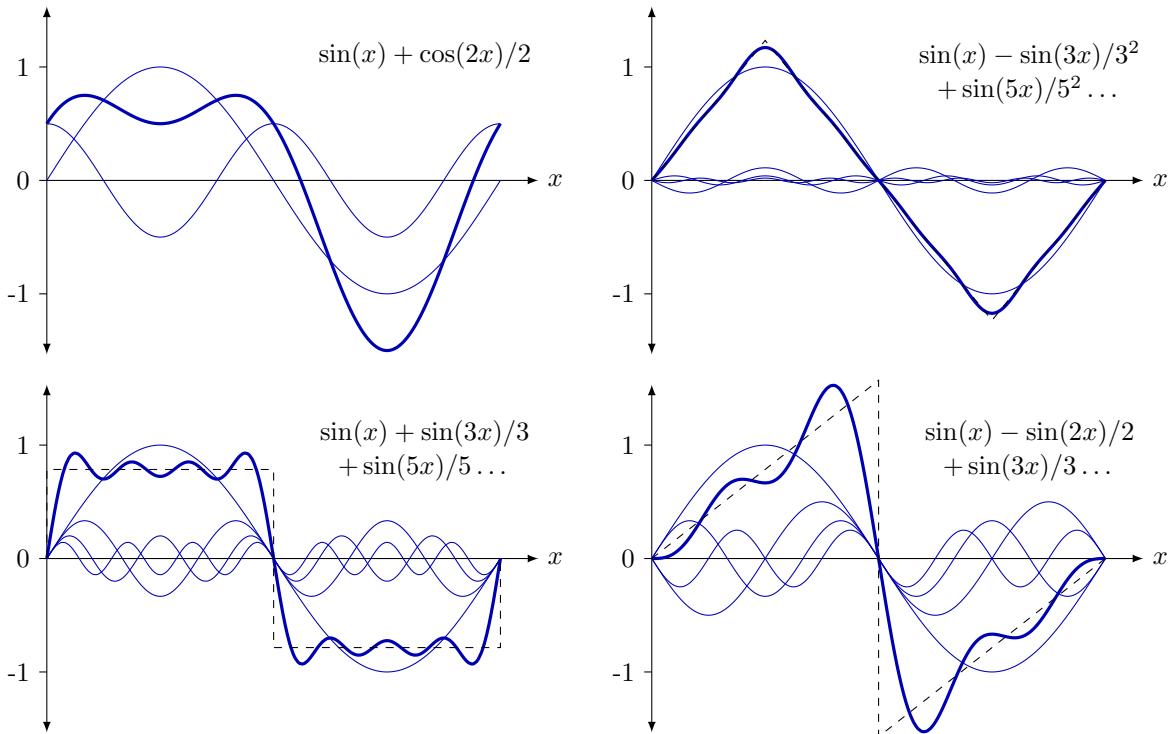


Abbildung 7.10.: Einige Beispiele von überlagerten Schwingungen.

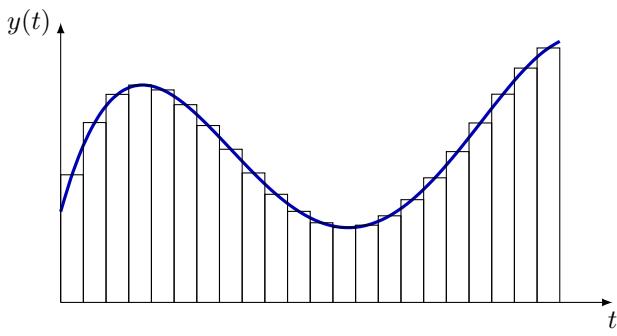


Abbildung 7.11.: Zerlegung eines analogen Signals in eine Serie von Rechteckimpulsen.

So schwingt z. B. die Membran eines Lautsprechers mit der Summe aller Instrumente, die sie übertragen soll.

## 7.7. Lissajous-Figuren

Im letzten Abschnitt haben wir uns mit der Addition von Teilschwingungen beschäftigt. Dabei sind wir stillschweigend davon ausgegangen, dass der Ausschlag aller beteiligten Schwingungen in die gleiche Richtung zeigt. Jede Teilschwingung schwingt nur in eine Richtung, und da sie alle in dieselbe Richtung zeigen, schwingt auch die Summe nur in eine Richtung.

Nun können zwei Signale auch in unterschiedliche Richtungen schwingen. Ein besonderer Fall tritt dann ein, wenn zwei Teilschwingungen senkrecht zueinander schwingen. Stehen die Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis, so entstehen die sogenannten *Lissajous-Figuren*.

Zur Entstehung der Lissajous-Figuren stelle man sich einen Lichtpunkt vor, der in vertikaler und horizontaler Richtung unterschiedlich in Schwingung versetzt wird. Beide Teilschwingungen haben eine *Amplitude*, eine *Frequenz* und einen *Nullphasenwinkel*.

Wird der Lichtpunkt gemäß den angegebenen Gleichungen in horizontaler und vertikaler Richtung bewegt, so ergibt sich ein zweidimensionales Muster. Stehen die Koeffizienten der Teilschwingungen in einem geeigneten Verhältnis, so zeichnet der Lichtpunkt eine Lissajous-Figur.

Bei den Beispielen in Abbildung 7.12 sind die Amplituden der Teilschwingungen gleich, und der Nullphasenwinkel der  $x$ -Teilschwingung ist null. Angegeben ist das Verhältnis der Frequenzen  $f_x : f_y$  sowie der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  der  $y$ -Teilschwingung ( $f_x : f_y / \varphi_0$ ). Die  $x$ -Komponente ist horizontal, die  $y$ -Komponente vertikal aufgetragen.

## 7.8. Aufgaben

**Aufgabe 7.1:** Eine Kugel hängt an einer Feder und benötigt für eine Schwingung 3,6 s. Wenn Sie die Kugel zum Zeitpunkt null oberhalb ihres Ruhepunktes loslassen, wo befindet sie sich nach 6,3 s?

**Aufgabe 7.2:** Lösen Sie die Differentialgleichung im Abschnitt 7.3.1 mit dem Ansatz  $s = \hat{s} \exp(i(\omega t + \varphi_0))$ .

**Aufgabe 7.3:** Bestimmen Sie die Schwingfrequenz in Hertz für einen Schwingkreis mit einer Masse von 100 g und einer Feder mit Federkonstante 10 N/m.

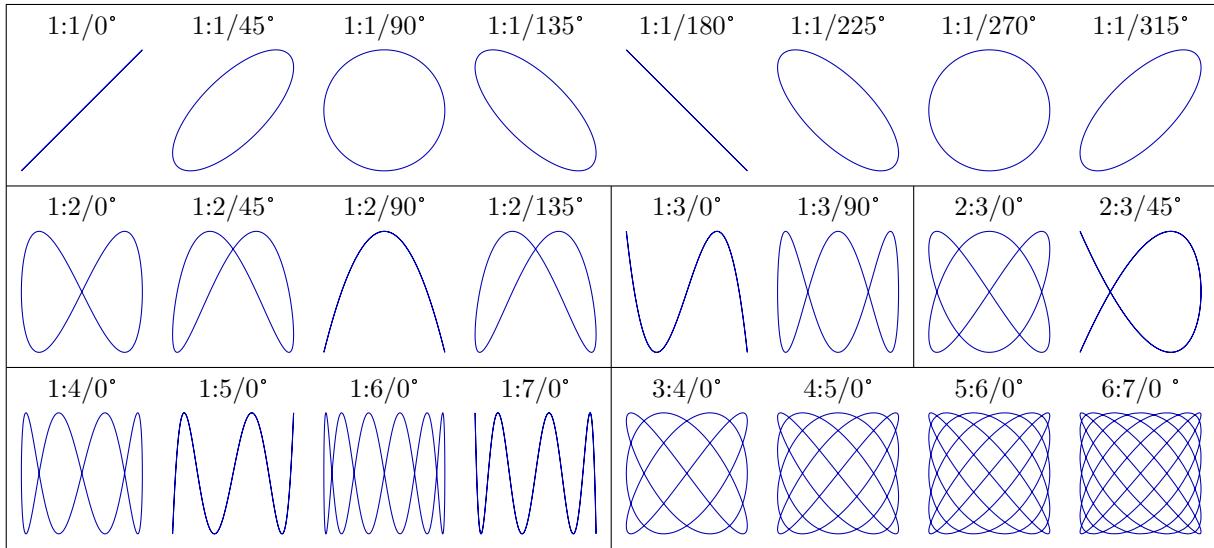


Abbildung 7.12.: Einige Lissajous-Figuren mit  $x = \sin(2\pi f_x t)$ ,  $y = \sin(2\pi f_y t + \varphi_0)$  und der Angabe  $f_x:f_y/\varphi_0$ .

**Aufgabe 7.4:** Ein Federpendel schwingt mit einer Frequenz von 100 Hz. Auf welchen Wert ändert sich die Frequenz bei einem Massenzuwachs um 56,25 %?

Nachgiebigkeit  $C_{ms}=1,23 \text{ mm/N}$ ; Schwingende Masse  $m=13,5 \text{ g}$ . Berechnen Sie die Resonanzfrequenz des freien (nicht eingebauten) Chassis.

**Aufgabe 7.5:** Unsere Netzspannung beträgt 230 V effektiv (Sinus). Berechnen Sie Scheitelwert und Mittelwert.

**Aufgabe 7.6:** Eine 1 kHz Sinusschallwelle habe den Scheitelwert 10 nm. Bestimmen Sie die Scheitelwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Wie groß sind Mittel- und Effektivwerte von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung?

**Aufgabe 7.7:** Sie beobachten einen Kronleuchter, der mit einer Periode von 5 s schwingt. Wie weit hängt der Kronleuchter unter der Decke?

**Aufgabe 7.8:** Die aufeinander folgenden positiven Amplituden einer 50 Hz-Schwingung haben die Größen 100, 88, 77, 68, 60, ... Wie groß sind Abklingkonstante, Dämpfungsverhältnis und Dämpfungsgrad? Wie groß ist die Amplitude nach 1 s?

**Aufgabe 7.9:** Ein mechanischer Schwingkreis mit 500 g Masse, Federkonstante 2 N/mm und Reibungskonstante 40 mm/Ns werde durch unterschiedliche Frequenzen angeregt. a) Bei welcher Frequenz wird dieser Schwingkreis die höchste Auslenkung zeigen? b) Um wie viel Prozent wird die Auslenkung höher sein als bei sehr niedrigen Frequenzen? c) Welchen Wert muss die Reibungskonstante haben, damit es gerade keine Überhöhung der Auslenkung gibt?

**Aufgabe 7.10:** Skizzieren Sie die Lissajous-Figuren folgender senkrecht zueinander stehenden Schwingungen: a)  $x = \sin wt$  und  $y = \cos 2wt$ , b)  $x = \sin wt$  und  $y = \sin 2wt$ , c)  $x = \sin wt$  und  $y = \sin 3wt$

**Aufgabe 7.11:** In meinen Wohnzimmersprechern befinden sich Tieftonchassis mit folgenden Angaben:

# 8. Starre Körper

## 8.1. Translation und Rotation

Bisher haben wir uns mit Massepunkten beschäftigt: Ein unendlich kleiner Körper mit einer endlichen Masse  $m$ . Diese starke Verallgemeinerung wollen wir hier aufbrechen und uns mit starren Körpern beschäftigen.

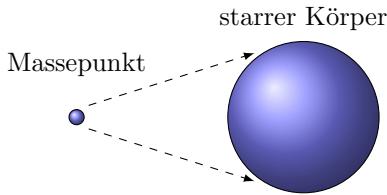


Abbildung 8.1.: Vom Massepunkt zum starren Körper.

Wir unterteilen die Bewegung von starren Körpern in zwei Arten, die einzeln oder in Kombination auftreten können, siehe Abbildung 8.2. Die *Translation* beschreibt die Bewegung des Körpers im Raum. Die *Rotation* behandelt die Drehung des Körpers um eine beliebige Achse. Alle Bewegungen des starren Körpers können durch eine Kombination von Translation und Rotation beschrieben werden.

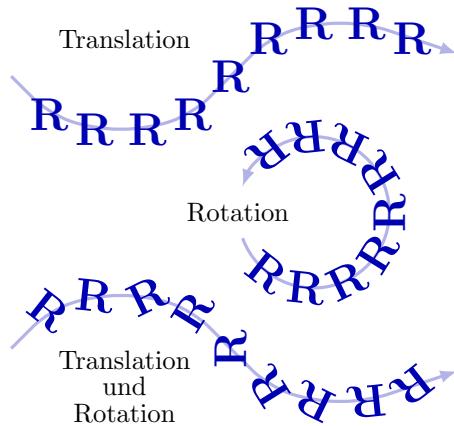


Abbildung 8.2.: Translation und Rotation.

Ein starrer Körper hat sechs *Freiheitsgrade*. Das heißt, zur vollständigen Beschreibung eines starren Körpers im Raum zu einem Zeitpunkt sind sechs Zahlen nötig. Das sind zum einen die drei Koordinaten für die Position im Raum, zum anderen die Rotationen um die drei Raumachsen.

Ein anderer Gedankengang für die Freiheitsgrade ist die Vorstellung eines starren Körpers als eine Menge von gekoppelten Massepunkten. Der erste Massepunkt hat drei Freiheitsgrade. Wird ein zweiter Massepunkt starr mit einem Abstand größer null an den ersten gekoppelt, so werden die sechs Freiheitsgrade der beiden

Massepunkte durch den festen Abstand um eins reduziert. Wird ein dritter Massepunkt neben der Verbindungsgeraden der ersten beiden an diese gekoppelt, so fügt dieser nur einen Freiheitsgrad für die Rotation um die Verbindungslinie der ersten beiden Massen hinzu. Alle weiteren fest gekoppelten Massepunkte fügen keine weiteren Freiheitsgrade hinzu.

## 8.2. Kraft und Drehmoment

### 8.2.1. Linienflüchtigkeit

Wirkt auf einen starren Körper an einem Ansatzpunkt die Kraft  $F$ , so kann für einen Zeitpunkt  $t$  der Ansatzpunkt der Kraft entlang einer Linie verschoben werden, ohne dass sich die Wirkung der Kraft auf Impuls  $p$  und Drehimpuls  $L$  ändert. Die Kraft ist *linienflüchtig*, wir sprechen von der *Linienflüchtigkeit* und verwenden den Begriff *Wirkungslinie*.

Wir stellen uns ein Floß auf einem See vor, dass mit einem kurzen Stoß (große Kraft für kurze Zeit) aus seiner Ruhelage gebracht wird, siehe Abbildung 8.3. Wenn dieser Stoß nicht genau in Richtung Mitte des Flosses erfolgt, ergibt sich daraus eine Kombination von Impuls  $p$  und Drehimpuls  $L$ . Der Angriffspunkt des Stoßes kann an einem beliebigen Punkt entlang der Wirkungslinie erfolgen, ohne dass sich die Wirkung auf Impuls  $p$  und Drehimpuls  $L$  ändert.

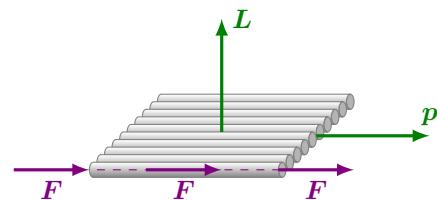


Abbildung 8.3.: Der Stoß kann an beliebiger Stelle entlang einer Linie erfolgen, ohne dass sich die Wirkung ändert.

Wirken auf einen starren Körper zu einem Zeitpunkt  $t$  mehrere Kräfte, so können diese zu einer Kraft zusammengefasst werden. (Eine Ausnahme sind Kräfte, die ausschließlich zu einem Drehmoment führen, dazu später mehr.) Um den Angriffspunkt bzw. die Wirkungslinie der Summe der Kräfte zu ermitteln, werden die beteiligten Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien verschoben, bis sie sich in einem Punkt treffen. Zur Bestimmung von Betrag und Richtung der resultierenden Kraft werden die beteiligten Kräfte vektoriell addiert.

Sollen mehr als zwei Kräfte zusammengefasst werden, dessen Wirkungslinien sich nicht in einem Punkt kreuzen, so werden die ersten zwei Kräfte zusammen-

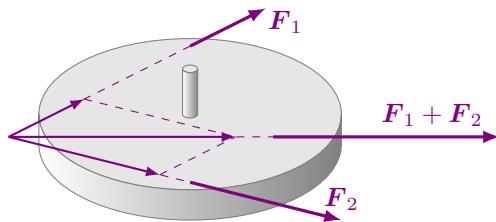
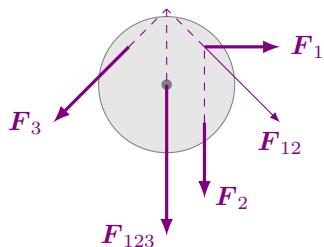


Abbildung 8.4.: Zusammenfassung von zwei Kräften in einem starren Körper.

gefasst, die Summe mit der dritten zusammengefasst etc., bis die Summe aller Kräfte übrig bleibt.

**Beispiel:** Auf einen starren Körper im Koordinatensprung wirken an den Punkten  $\mathbf{r}_1 = (1; 1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (1; -1)$  und  $\mathbf{r}_3 = (-1; 1)$  (in cm) entsprechend die Kräfte  $\mathbf{F}_1 = (1; 0)$ ,  $\mathbf{F}_2 = (0; -1)$  und  $\mathbf{F}_3 = (-1; -1)$  (in N), siehe Abbildung unten. Wir fassen  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_2$  zusammen und finden im Punkt  $\mathbf{r}_{12} = (1; 1)$  die Kraft  $\mathbf{F}_{12} = (1; -1)$ . Wir fügen  $\mathbf{F}_3$  hinzu und erhalten im Punkt  $\mathbf{r}_{123} = (0; 2)$  die Kraft  $\mathbf{F}_{123} = (0; -2)$ . Diese Kraft kann entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden wie in der nachfolgenden Skizze angedeutet:



Wirken auf einen Körper parallele Kräfte, so können diese mit Hilfskräften zusammengefasst werden:

### 8.2.2. Hilfskräfte

Zur Lösung einer Fragestellung für einen starren Körper können gedanklich Kräftepaare hinzugefügt werden, die sich gegenseitig aufheben: Zwei Kräfte mit gleichem Betrag und gemeinsamer Wirkungslinie, aber um  $180^\circ$  gedrehte Richtung. Diese beiden *Hilfskräfte* können entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, siehe Abbildung 8.5.

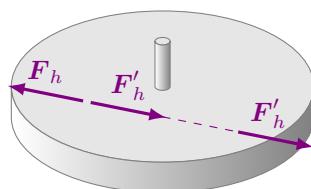


Abbildung 8.5.: Neutrale Hilfskräfte ohne Wirkung auf den starren Körper.

Wirken auf einen starren Körper zwei parallele Kräfte, so können diese nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren nicht addiert werden. Durch Hinzufügen von zwei Hilfskräften auf einer Linie können die parallelen Richtungen so geändert werden,

dass sie sich in einem Punkt kreuzen, siehe Abbildung 8.6.

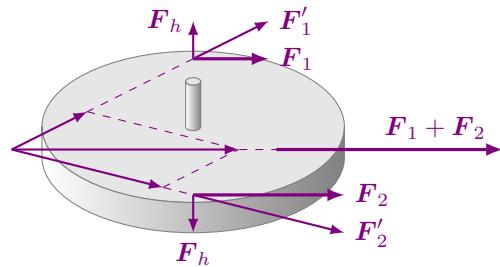
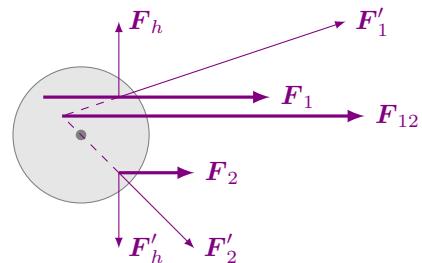


Abbildung 8.6.: Hilfskräfte zur Zusammenfassung paralleler Kräfte.

**Beispiel:** Auf einen starren Körper wirken an den Punkten  $\mathbf{r}_1 = (-1; 1)$  und  $\mathbf{r}_2 = (1; -1)$  (in cm) entsprechend die Kräfte  $\mathbf{F}_1 = (3; 0)$  und  $\mathbf{F}_2 = (1; 0)$  (in N). Wir verschieben  $\mathbf{F}_1$  nach  $(1; 1)$ , fügen an den Punkten  $(1; 1)$  und  $(1; -1)$  die beiden Hilfskräfte  $\mathbf{F}_h = (0, 1)$  und  $\mathbf{F}'_h = (0, -1)$  hinzu und erhalten die modifizierten Kräfte  $\mathbf{F}'_1 = (3; 1)$  und  $\mathbf{F}'_2 = (1, -1)$ . Wir addieren die Kräfte und erhalten im Punkt  $\mathbf{r}_{12} = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  die Kraft  $\mathbf{F}_{12} = (4, 0)$ .



Bei zwei parallelen Kräften in entgegengesetzter Richtung mit gleichem Betrag versagt auch diese Methode. Hier bewirken die Kräfte ausschließlich ein Drehmoment (auf das wir später eingehen) und können nicht zu einer Kraft kombiniert werden.

Bei der Analyse der Auswirkung von Kräften auf Translation und Rotation spielen Hilfskräfte eine wichtige Rolle:

### 8.2.3. Auswirkung auf Translation und Rotation

Wirken auf einen starren Körper Kräfte, so können diese zu einer Translation, einer Rotation oder einer Kombination aus beiden führen, siehe Abbildung 8.7.

Wirkt auf einen starren Körper mittig eine Kraft, so ändert dies den Impuls  $p$  (Translation) und lässt den Drehimpuls  $L$  (Rotation) unverändert, siehe Abbildung 8.7 a). In b) wirken zwei Kräfte mit gleichem Betrag symmetrisch zum Mittelpunkt in entgegengesetzter Richtung. Es ändert sich der Drehimpuls  $L$  (Rotation), während der Impuls  $p$  (Translation) unverändert bleibt. Schließlich, in c) wirkt eine Kraft nicht mittig auf den starren Körper, was gleichzeitig zu einer Translation und Rotation führt.

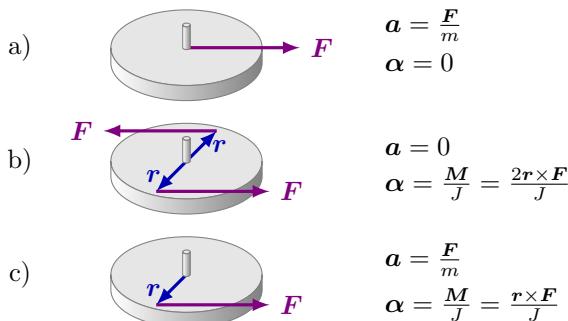


Abbildung 8.7.: Kräfte, die zur Translation und Rotation führen.

Wie wirkt eine Kraft auf Translation und Rotation, die nicht mittig auf einen starren Körper trifft? In Abbildung 8.8 betrachten wir wieder einen starren Körper und bedienen uns der Hilfskräfte.

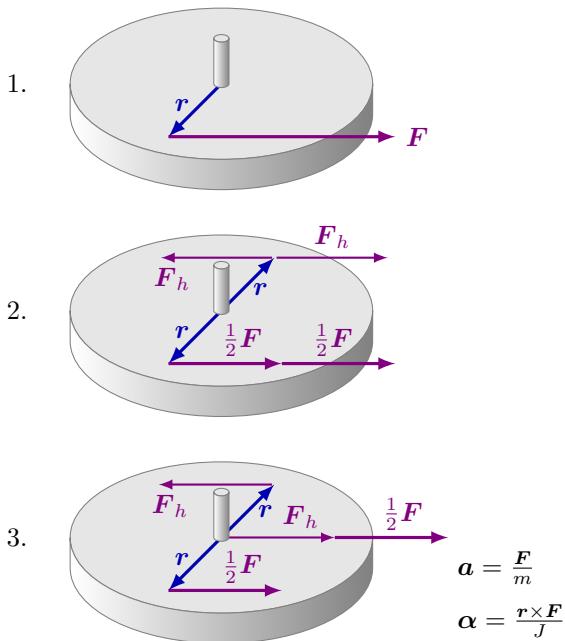


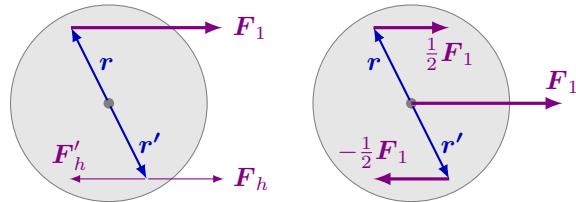
Abbildung 8.8.: Auswirkung einer Kraft auf Translation und Rotation.

Unter 1. sehen wir einen starren Körper, auf den eine äußere Kraft  $F$  unter einem Radius  $r$  zur Mitte wirkt. Unter 2. fügen wir gegenüber der Mitte des starren Körpers zwei Hilfskräfte  $F_h$  ein, die in gleicher Richtung und mit halben Betrag wie die äußere Kraft  $F$  wirken. Unter 3. fassen wir die eine Hilfskraft mit der Hälfte der äußeren Kraft zusammen. Es folgt für Beschleunigung  $a$  und Winkelbeschleunigung  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \boldsymbol{\alpha} &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}{J} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Auf einen starren Körper mit seiner Mitte im Koordinatenursprung wirkt am Punkt  $\mathbf{r}_1 = (-1; 2)$  (in cm) die Kraft  $\mathbf{F}_1 = (2; 0)$  (in N). Gegenüber bezogen auf die Mitte des starren Körpers, also im Punkt

$(1; -2)$  setzen wir die Hilfskräfte  $\mathbf{F}_h = (1; 0)$  und  $\mathbf{F}'_h = (-1; 0)$  an. Wir addieren eine Hälfte von  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_h$  und 'verschieben' sie damit in die Mitte des starren Körpers. Die resultierenden Kräfte wirken jeweils isoliert auf Translation und Rotation.



### 8.3. Schwerpunkt

Im vorigen Abschnitt haben wir von der *Mitte* eines starren Körpers gesprochen, aber wo befindet sich diese Mitte genau? Wir betrachten einen starren Körper, auf den ein homogenes Kraftfeld, z.B. das Kraftfeld der Erde, wirkt. Die Mitte ist der Punkt im starren Körper, an dem eine punktuelle äußere Kraft die gleiche Wirkung wie das Kraftfeld hat. Wir führen den Begriff *Schwerpunkt* ein.

Eine Kraft, die auf den Schwerpunkt wirkt, ändert nur die Translation des Körpers, die Rotation bleibt unverändert. Daraus ergibt sich die Forderung, dass das resultierende Drehmoment eines Kraftfelds bezogen auf den Schwerpunkt null ergibt.

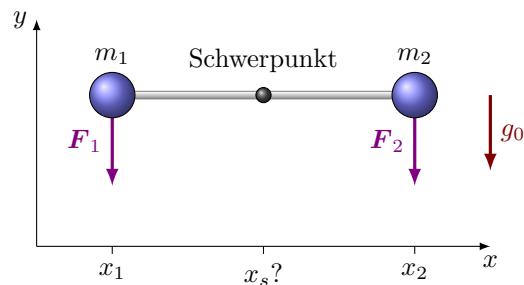


Abbildung 8.9.: Schwerpunkt zweier Massepunkte.

Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall mit zwei Massepunkten  $m_1$  und  $m_2$ , die durch eine gerade masselose Stange starr verbunden sind, siehe Abbildung 8.9. Wir suchen die Position  $x_s$ , bei dem die Summe der Drehmomente null ist:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= 0 \\ (x_1 - x_s)F_1 + (x_2 - x_s)F_2 &= 0 \\ (x_1 - x_s)m_1g_0 + (x_2 - x_s)m_2g_0 &= 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 - (m_1 + m_2)x_s &= 0 \\ x_s &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Der gleiche Ansatz kann für beliebig viele Massepunkte entlang einer Geraden durchgeführt werden. Es folgt etwas allgemeiner:

$$x_s = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

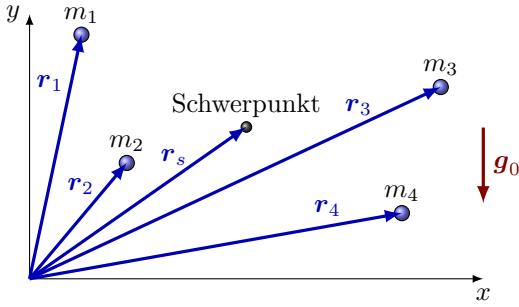


Abbildung 8.10.: Bestimmung des Schwerpunkts beliebig vieler Massen im Raum.

Als nächstes betrachten wir beliebig viele Massenpunkte im Raum, siehe Abbildung 8.10. Wieder muss die Summe aller Drehmomente null ergeben:

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{M}_i &= 0 \\ \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) \times \mathbf{F}_i &= 0 \\ \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) \times \mathbf{g}_0 &= 0 \\ \left\{ \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) \right\} \times \mathbf{g}_0 &= 0\end{aligned}$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist nur dann null, wenn einer der Faktoren des Vektorprodukts null ist, oder der Winkel der Faktoren zueinander null ist. Da die Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}_0$  nicht null ist und wir den Schwerpunkt für beliebige Richtungen des Körpers im Kraftfeld ermitteln wollen, muss die Summe in den geschweiften Klammern null ergeben:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) &= 0 \\ \sum_i (m_i \mathbf{r}_i - m_i \mathbf{r}_s) &= 0 \\ \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_s &= 0 \\ \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s \sum_i m_i &= 0 \\ \mathbf{r}_s &= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}\end{aligned}\quad (8.1)$$

In einem letzten Schritt verallgemeinern wir die gefundene Gleichung für kontinuierliche starre Körper.

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{m_{sk}} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{m_{sk}} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (8.2)$$

Dabei steht  $m_{sk}$  für die Masse des starren Körpers:  $m_{sk} = \int dm$ . In dem ersten Integral wird die Masse des Körpers in unendlich viele kleine Massen  $dm$  zerlegt und mit den dazugehörigen Radien  $\mathbf{r}$  aufaddiert. Im zweiten Integral wird über das Volumen integriert. Die Masse  $dm$  wird durch das Produkt aus Dichte  $\rho(\mathbf{r})$  und Volumen  $dV$  ersetzt.

Wie kann der Schwerpunkt eines starren Körpers experimentell ermittelt werden? Wird ein starrer Körper

an einen Faden aufgehängt, so kommt sein Schwerpunkt auf der verlängerten Linie des Fadens zur Ruhe. Wird der starre Körper nacheinander an zwei unterschiedlichen Stellen aufgehängt, so befindet sich der Schwerpunkt am Kreuzungspunkt der beiden verlängerten Fadenlinien, siehe Abbildung 8.11.

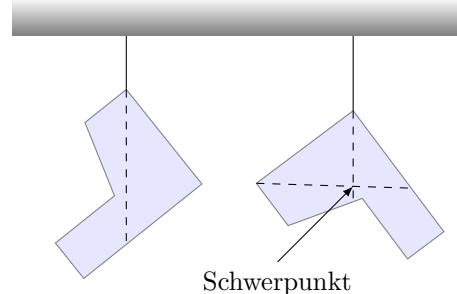


Abbildung 8.11.: Durch das Aufhängen an zwei verschiedenen Punkten kann der Schwerpunkt eines starren Körpers ermittelt werden.

Der Schwerpunkt eines starren Körpers kann auch außerhalb des starren Körpers liegen. So liegt bei einem Ring der Schwerpunkt genau im Zentrum des Rings, oder bei einem gewinkelten Draht zwischen den beiden Drahtstücken.

## 8.4. Masse und Trägheitsmoment

Wird auf einen Körper zentral, das heißt auf einer Geraden durch dessen Schwerpunkt, eine Kraft ausgeübt, so wird er auf dieser Geraden beschleunigt. Das Bindeglied zwischen Kraft  $\mathbf{F}$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ist die Masse  $m$ :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Wirkt auf einen starren Körper ein Drehmoment, so wird dieser in seiner Rotation beschleunigt. Das Bindeglied zwischen Drehmoment  $\mathbf{M}$  und Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}$  ist das Trägheitsmoment  $J$ :

$$\mathbf{M} = J \boldsymbol{\alpha}$$

Die SI-Einheit des Trägheitsmoments ergibt sich zu

$$[J] = \text{kg m}^2$$

### 8.4.1. Allgemeine Gleichungen

Für einen Massenpunkt mit Masse  $m$ , der um eine Achse mit Abstand  $r_\perp$  rotiert haben wir bereits das Trägheitsmoment kennengelernt:

$$J = m r_\perp^2$$

Besteht ein starrer Körper aus mehreren Massenpunkten mit Massen  $m_i$ , die mit den Abständen  $r_{\perp i}$  um eine Achse rotieren, so ergibt sich für das Trägheitsmoment:

$$J = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \quad (8.3)$$

Für einen starren Körper mit beliebiger Dichteverteilung folgt sinngemäß:

$$J = \int r_{\perp}^2 dm = \int r_{\perp}^2 \rho(\mathbf{r}) dV \quad (8.4)$$

Das erste Integral integriert über alle Masselemente  $dm$  des starren Körpers. Das zweite Integral integriert über alle Volumenelemente  $dV$  und bedient sich der Dichte  $\rho$  am Punkt  $\mathbf{r}$ .

### 8.4.2. Beispiele für Trägheitsmomente

In Tabelle 8.1 sind die Trägheitsmomente einiger elementarer Körper aufgelistet. Exemplarisch soll hier das Trägheitsmoment eines dünnen Stabs mit Masse  $m$  und Länge  $l$  bestimmt werden, dessen Drehachse senkrecht zum Stab durch dessen Schwerpunkt verläuft, siehe vorletzte Zeile in Tabelle 8.1.

Wir bedienen uns des ersten Integrals in (8.4) und integrieren über die halbe Stablänge  $l/2$ . Wir substituieren die Masse  $dm$  durch  $\frac{m}{l} dr_{\perp}$  und lösen das Integral:

$$\begin{aligned} J &= \int r_{\perp}^2 dm = 2 \int_0^{l/2} r_{\perp}^2 \frac{m}{l} dr_{\perp} \\ &= \frac{2m}{l} \int_0^{l/2} r_{\perp}^2 dr_{\perp} = \frac{2m}{l} \left[ \frac{r_{\perp}^3}{3} \right]_0^{l/2} \\ &= \frac{2m}{l} \left( \frac{l^3}{24} \right) = \frac{m}{12} l^2 \end{aligned}$$

### 8.4.3. Verschiebung der Drehachse

Häufig verläuft die Drehachse eines starren Körpers nicht durch dessen Schwerpunkt. Ausgehend von einem starren Körper der Masse  $m$  mit bekanntem Trägheitsmoment im Schwerpunkt  $J_0$  wollen wir eine Regel finden, mit der wir für eine um  $\mathbf{d}$  parallel verschobene Drehachse  $\omega'$  das Trägheitsmoment  $J'$  bestimmen können.

Gemäß Abbildung 8.12 erhalten wir:

$$\begin{aligned} J' &= \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{d})^2 \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 - 2\mathbf{r}_i \mathbf{d} + \mathbf{d}^2) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2 - \sum_i 2m_i \mathbf{r}_i \mathbf{d} + \sum_i m_i \mathbf{d}^2 \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2 - 2\mathbf{d} \sum_i m_i \mathbf{r}_i + \mathbf{d}^2 \sum_i m_i \end{aligned}$$

Die erste Summe entspricht dem Trägheitsmoment im Schwerpunkt  $J_0$ . Die zweite Summe entspricht der Gleichung für den Schwerpunkt (8.1) mal der Masse  $m$ . Da sich die Radien  $\mathbf{r}_i$  bereits auf den Schwerpunkt beziehen, ergibt die Summe null, so dass der mittlere Ausdruck ebenfalls null ergibt. Die dritte Summe schließlich entspricht der gesamten Masse  $m$  des starren Körpers. Es folgt:

$$J' = J_0 + d^2 m \quad (8.5)$$

Das Trägheitsmoment für eine parallel um  $\mathbf{d}$  aus dem Schwerpunkt verschobene Drehachse ist die Summe aus dem Trägheitsmoment  $J_0$  im Schwerpunkt und dem Trägheitsmoment der in einem Punkt gedachten Masse des starren Körpers mit Abstand  $d$ .

Mit diesem *Steinerschen Satz* kann die letzte Zeile in Tabelle 8.1 aus der vorletzten Zeile abgeleitet werden.

## 8.5. Impuls und Drehimpuls

### 8.5.1. Impuls eines starren Körpers

Für einen Massepunkt ist der Impuls  $\mathbf{p}_i$  das Integral der angelegten Kraft  $\mathbf{F}_i$  über die Zeit  $t$ .

$$\mathbf{p}_i = \int \mathbf{F}_i dt$$

Für einen starren Körper können wir uns die Kraft  $\mathbf{F}$  aufgeteilt auf alle Massepunkte vorstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i \int \mathbf{F}_i dt = \int \sum_i \mathbf{F}_i dt \\ \mathbf{p} &= \int \mathbf{F} dt \end{aligned} \quad (8.6)$$

Auf beiden Seiten nach der Zeit differenziert folgt für die Kraft  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \quad (8.7)$$

Wir haben bereits für Massepunkte den Impuls  $\mathbf{p}_i$  als das Produkt von Masse  $m_i$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i$  kennengelernt:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$$

In einem starren Körper bewegen sich für die Translation alle Massepunkte  $m_i$  mit der gleichen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so dass sich allgemein herleiten lässt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v} = \left( \sum_i m_i \right) \mathbf{v} \\ \mathbf{p} &= m \mathbf{v} \end{aligned} \quad (8.8)$$

### 8.5.2. Drehimpuls eines starren Körpers

Für einen Massepunkt ist der Drehimpuls  $\mathbf{L}_i$  das Integral des angelegten Drehmoments  $\mathbf{M}_i$  über die Zeit  $t$ .

$$\mathbf{L}_i = \int \mathbf{M}_i dt$$

Für einen starren Körper können wir uns das Drehmoment  $\mathbf{M}$  aufgeteilt auf alle Massepunkte vorstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \int \mathbf{M}_i dt = \int \sum_i \mathbf{M}_i dt \\ \mathbf{L} &= \int \mathbf{M} dt \end{aligned} \quad (8.9)$$

Auf beiden Seiten nach der Zeit differenziert folgt für das Drehmoment  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} \quad (8.10)$$

Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
	Ein Massepunkt um eine Drehachse	$J = m r^2$
	Zylindermantel oder Ring	$J = m r^2$
	Vollzylinder oder runde Scheibe	$J = \frac{m}{2} r^2$
	Hohle Kugel	$J = \frac{2m}{3} r^2$
	Volle Kugel	$J = \frac{2m}{5} r^2$
	Massiver Quader oder rechteckige Scheibe ( $c = 0$ )	$J = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
	Dünner Stab um die Mitte	$J = \frac{m}{12} l^2$
	Dünner Stab um ein Ende	$J = \frac{m}{3} l^2$

Tabelle 8.1.: Beispiele einiger Trägheitsmomente.

Lässt sich der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  auch über die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und das Trägheitsmoment  $J$  herleiten?

$$\mathbf{L} \stackrel{?}{=} J\boldsymbol{\omega}$$

Befindet sich ein Massepunkt  $m_i$  mit Impuls  $\mathbf{p}_i$  an der Position  $\mathbf{r}_i$  relativ zu einem Drehpunkt, so beträgt der Drehimpuls  $\mathbf{L}_i$ :

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

Wir beginnen mit dieser Gleichung, ersetzen den Impuls  $\mathbf{p}_i$  durch  $m_i \mathbf{v}_i$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i$  wiederum durch  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})) \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir die Identität  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , auch *BAC-CAB-Formel* genannt, angewendet. Im ersten Teil sehen wir die vermuteten Trägheitsmomente  $J_i = m_i r_i^2$ . Der zweite Teil der Gleichung macht aber deutlich, dass die getroffene Annahme  $\mathbf{L} \stackrel{?}{=} J\boldsymbol{\omega}$  nicht haltbar ist!

Die Gleichung  $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$  gilt nur für Massepunkte und Körper mit bestimmten Symmetrien. Allgemeiner muss das Trägheitsmoment  $J$  durch einen Tensor 2. Stufe ersetzt werden und kann mit Vektoren alleine nicht beschrieben werden. Wir wollen das Thema hier nicht weiter vertiefen, und beschränken uns im weiteren Verlauf auf Fragestellungen, bei denen mit dem skalaren Trägheitsmoment  $J$  gearbeitet werden kann.

## 8.6. Energie und Leistung

Wir betrachten die Größen *Energie* und *Leistung* aus Sicht von Translation und Rotation.

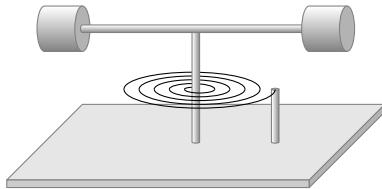
### 8.6.1. Translation

Wir haben die *kinetische Energie* eines Massepunktes mit Masse  $m_i$ , der sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt, bereits kennengelernt. Ein starrer Körper mit Masse  $m$  setzt sich aus vielen Massepunkten  $m_i$  zusammen, die sich alle mit der gleichen Geschwindigkeit  $v$  bewegen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \sum_i E_{\text{kin} i} = \sum_i \frac{m_i}{2} v^2 = \frac{\sum_i m_i}{2} v^2 \\ E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2} v^2 \end{aligned} \tag{8.11}$$

## Anwendung 8.1: Torsionspendel und Messung des Trägheitsmoments

Wir haben bereits das Federpendel und das mathematische Pendel kennengelernt und wenden uns jetzt dem *Torsionspendel* zu. Es handelt sich dabei um einen starren Körper, der in seinem Schwerpunkt drehbar montiert ist, und durch eine Spiralfeder in Ruhelage gehalten wird.



Die Spiralfeder mit einem *Direktionsmoment* (Federkonstante)  $D_m$  führt bei einer Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  zu einem *Rückstell-Drehmoment*  $M_R$ :

$$M_R = -D_m \varphi$$

Der starre Körper besitzt ein Trägheitsmoment  $J_0$ , welches bei einer Winkelbeschleunigung  $\alpha = \ddot{\varphi}$  zu einem Trägheitsmoment  $M_T$  führt:

$$M_T = -J_0 \alpha = -J_0 \ddot{\varphi}$$

Die Summe der Drehmomente muss null ergeben, so dass sich eine lineare homogene gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned} M_T + M_R &= 0 \\ -J_0 \ddot{\varphi} - D_m \varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{D_m}{J_0} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichung lässt sich mit einer harmonischen Schwingung  $\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega t + \gamma)$  lösen. Es

folgt für die Kreisfrequenz  $\omega$ :

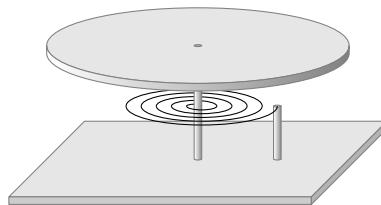
$$\omega = \sqrt{\frac{D_m}{J_0}}$$

Im Gegensatz zu Schwerkraftpendeln ist bei einem Torsionspendel die Frequenz unabhängig von der Auslenkung. Abweichungen in der Frequenz ergeben sich nur durch Nichtlinearitäten der Spiralfeder.

Ein Torsionspendel kann zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verwendet werden. Nach Umstellung der letzten Gleichung ergibt sich für das Trägheitsmoment  $J_0$ :

$$J_0 = \frac{D_m}{\omega^2}$$

Es wird ein Drehsteller mit einer Spiralfeder montiert, so dass sich ein Torsionspendel ergibt:



Ausgehend von einem bekannten Direktionsmoment (Federkonstante)  $D_m$  wird zunächst die Kreisfrequenz des leeren Tellers  $\omega_0$  und dann die Kreisfrequenz mit dem zu untersuchenden starren Körper  $\omega$  ermittelt. Es folgt für das Trägheitsmoment  $J_x$  des hinzugefügten starren Körpers:

$$J_x = D_m \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right)$$

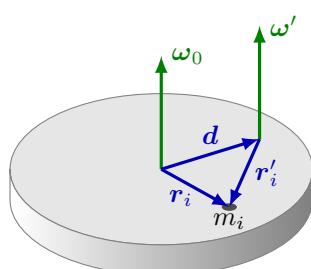


Abbildung 8.12.: Auswirkung einer um  $\mathbf{d}$  verschobenen Drehachse auf das Trägheitsmoment.

Übrig bleibt die uns bekannte Gleichung für kinetische Energie.

Die gleiche Vorgehensweise können wir auf *potentielle Energie* und *Leistung* anwenden und stellen fest, dass die Gleichungen für Massenpunkte unverändert übernommen werden können:

Die *potentielle Energie* eines starren Körpers mit Masse  $m$  bei einer Erdbeschleunigung  $g_0$  für eine gege-

bene Höhe  $h$  beträgt:

$$E_{\text{pot}} = -mg_0h \quad (\text{Kraftfeld der Erde}) \quad (8.12)$$

Auch bei einer gespannten Feder sprechen wir von potentieller Energie. Für eine Feder mit Konstante  $D$ , die um eine Strecke  $\Delta l$  in ihrer Länge verändert wurde ist eine potentielle Energie gespeichert.

$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2} \Delta l^2 \quad (\text{Feder}) \quad (8.13)$$

Da hier der Begriff Masse nicht auftaucht, spielt die Verteilung der Masse, ob Massenpunkt oder starrer Körper, keine Rolle. Allgemein ist die potentielle Energie die Kraft  $F_{||}$ , die parallel über eine Strecke  $s$  auf einen Körper ausgeübt wird. Wir drücken dies durch das Skalarprodukt aus:

$$E_{\text{pot}} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.14)$$

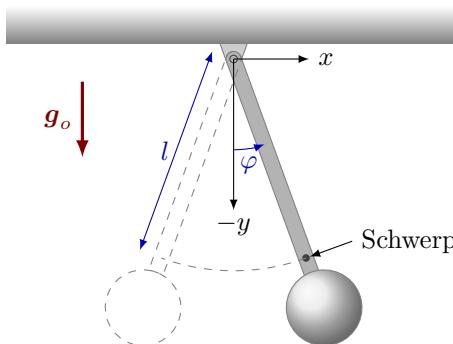
Die *Leistung* in der Translation ist die Änderung der Arbeit oder Energie über die Zeit. Dies kann über das

## Anwendung 8.2: Physikalisches Pendel

Im vorigen Kapitel haben wir bereits das *mathematische Pendel* kennengelernt. Wir sind von einem Massepunkt ausgegangen und haben folgende Kreisfrequenz für das Pendel ermittelt:

$$\omega_{\text{math}} = \sqrt{\frac{g_0}{l}}$$

Beim *physikalischen Pendel* lassen wir die Annahme eines Massepunkts fallen und gehen von einem starren Körper aus. In der folgenden Abbildung ist ein solches Pendel dargestellt.



Wir betrachten die Drehmomente auf einer Drehachse, die gemäß Skizze in  $z$ -Richtung liegt. Unter der Annahme, dass keine Reibungsverluste vorliegen, gibt es ein Beschleunigungs-Drehmoment  $M_B$  aufgrund der Erdanziehung und ein Trägheits-Drehmoment  $M_T$  aufgrund des Trägheitsmomentes des Pendels. Mit  $\mathbf{r}_S$  für die aktuelle Position des Schwerpunkts des Pendels folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_S \times \mathbf{F} \\ &= l(\mathbf{e}_x \sin \varphi - \mathbf{e}_y \cos \varphi) \times (-mg_0 \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

$$= -mg_0 l \mathbf{e}_z \sin \varphi$$

$$\mathbf{M}_T = -J\alpha \mathbf{e}_z = -J\ddot{\varphi} \mathbf{e}_z$$

Die Summe der Drehmomente muss null ergeben:

$$\mathbf{M}_B + \mathbf{M}_T = 0$$

$$-mg_0 l \mathbf{e}_z \sin \varphi - J\ddot{\varphi} \mathbf{e}_z = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg_0 l}{J} \sin \varphi = 0$$

Wir gehen von einer kleinen Pendelbewegung aus ( $\varphi < 5^\circ$ ) und nähern  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Es folgt eine lineare homogene gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg_0 l}{J} \varphi = 0$$

Die Gleichung lässt sich durch eine harmonische Schwingung lösen, z.B.  $\varphi = \hat{\varphi} \sin(\omega t + \gamma)$ . Es ergibt sich für die Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{mg_0 l}{J}}$$

Wir ersetzen das Trägheitsmoment  $J$  um das um  $l$  verschobene Trägheitsmoment im Schwerpunkt  $J_0$ , und kürzen den Bruch mit  $ml$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{mg_0 l}{J_0 + l^2 m}} = \sqrt{\frac{g_0}{\frac{J_0}{ml} + l}}$$

Der letzte Ausdruck zeigt, dass im Vergleich zum mathematischen Pendel die Kreisfrequenz durch das Trägheitsmoment des Pendels reduziert wird.

Skalarprodukt von Kraft  $\mathbf{F}$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ausgedrückt werden.

$$P = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (8.15)$$

Auch hier gelten für starre Körper die gleichen Zusammenhänge wie für Massepunkte.

### 8.6.2. Rotation

Bei der Rotation eines starren Körpers bewegen sich die Massepunkte  $m_i$  mit einem Abstand  $r_\perp$  um eine Achse. Jedes dieser Massepunkte hat eine kinetische Energie  $E_{\text{kin} i}$ , die wir zur *Rotationsenergie* aufsummieren:

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \sum_i E_{\text{kin} i} = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} (\omega r_\perp)^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_\perp^2 \end{aligned}$$

Die verbleibende Summe entspricht dem Trägheitsmoment aus Abschnitt 8.4.1, so dass wir allgemein schreiben:

ben:

$$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2 \quad (8.16)$$

Beim Torsionspendel (Anwendung auf Seite 63) haben wir bereits das Direktionsmoment (die Federkonstante)  $D_m$  einer Spiralfeder kennengelernt. Wird die Spiralfeder um einen Winkel  $\varphi$  ausgelenkt, so wirkt ein Rückstell-Drehmoment von  $M_R = -D_m \varphi$ . Die in der Spiralfeder gespeicherte Energie ist das Produkt von Kraft zum Spannen der Feder und der zurückgelegten Strecke. Wir beginnen mit dem Integral für potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = \int F \, ds$$

Wir gehen davon aus, dass die Kraft  $F$  zu allen Zeiten tangential zur Drehbewegung angreift und ersetzen diese durch das Drehmoment  $M$ . Des Weiteren ersetzen wir die Position  $ds$  durch das Produkt von Winkel  $d\varphi$  und Radius  $r$ :

$$E_{\text{pot}} = \int \frac{M}{r} \cdot d\varphi \, r = \int M \, d\varphi$$

Das letzte Integral kann allgemein mit Vektoren ausgedrückt werden:

$$E_{\text{pot}} = \int \mathbf{M} d\varphi \quad (8.17)$$

Wir setzen das Rückstell-Drehmoment  $M_R$  und die Federkonstante  $D_m$  ein, und erhalten die potentielle Energie einer Spiralfeder

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= - \int M_R d\varphi = \int D_m \varphi d\varphi = D_m \int \varphi d\varphi \\ E_{\text{pot}} &= \frac{D_m}{2} \varphi^2 \quad (\text{Spiralfeder}) \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die *Leistung* in der Rotation ist die Änderung der Arbeit oder Energie über die Zeit. Dies kann auch mit dem Skalarprodukt von Drehmoment  $\mathbf{M}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  ausgedrückt werden.

$$P_{\text{rot}} = \frac{dE}{dt} = \mathbf{M} \boldsymbol{\omega} \quad (8.19)$$

### 8.6.3. Kombination von Translation und Rotation

Für ein abgeschlossenes System bleibt die Summe der Energien konstant.

$$\sum_i E_{\text{poti}} + \sum_i E_{\text{kini}} + \sum_i E_{\text{roti}} = \text{konstant}$$

Beispiel: Ein starrer Körper rollt eine schräge Ebene hinunter. Zu Beginn hat der Körper nur eine potentielle Energie. Ist der Körper um eine Höhe  $h$  die schräge Ebene hinunter gerollt, so wurde die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  in kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  und Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$  umgewandelt. Die Aufteilung ergibt sich durch Trägheitsmoment und Durchmesser des Körpers.

Beispiel: Eine massive Kugel rollt eine schräge Ebene um die Höhe  $h$  hinunter. Wie teilt sich die Energie in Translation und Rotation auf, und wie schnell bewegt sich die Kugel? Antwort: Wir gehen davon aus, dass sich die Kugel zu Beginn nicht bewegt. Die potentielle Energie zu Beginn beträgt  $E_{\text{pot}} = mg_0 h$ . Unten angekommen teilt sich die Energie in kinetische Energie und Rotationsenergie auf. Wir wenden den Energieerhaltungssatz an:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \\ mg_0 h &= \frac{m}{2} v^2 + \frac{J}{2} \omega^2 \\ mg_0 h &= \frac{m}{2} v^2 + \frac{\frac{2m}{5} r^2}{2} \left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ g_0 h &= \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{5} v^2 \end{aligned}$$

Die Energie wird sich 5:2 in kinetische Energie und Rotationsenergie aufteilen. Wir lösen die Gleichung nach  $v$  auf:

$$v^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = g_0 h$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g_0 h}$$

Interessant an dem Ergebnis ist, dass Masse und Radius der Kugel nicht in die Gleichung eingeht.

## 8.7. Aufgaben

**Aufgabe 8.1:** Auf einen starren Körper im Koordinatenursprung wirken an den kartesischen Koordinaten (1;1;0) und (0;-2;0) die entsprechenden Kräfte 4 N und 2 N in positiver x-Richtung. Bestimmen Sie die resultierende Kraft mit Betrag, Richtung und Position.

**Aufgabe 8.2:** Auf einen starren Körper mit Drehachse im Koordinatenursprung entlang der z-Achse wirken an den zwei Punkten (1;1;1) cm und (-1;2;-1) cm die Kräfte 1 N und 2 N in negativer y-Richtung. Bestimmen Sie das resultierende Drehmoment.

**Aufgabe 8.3:** An einer vergleichsweise leichten 1 m langen Stange seien am rechten und linken Ende die entsprechenden Massen  $m_1$  und  $m_2$  montiert. Bestimmen Sie den Schwerpunkt für  $m_1=2$  kg und  $m_2=5$  kg.

**Aufgabe 8.4:** Ein starrer Körper bestehe aus folgenden Massepunkten:

Masse	Position
10 g	(1;0;0)
20 g	(0;1;0)
30 g	(0;0;1)
40 g	(1;1;1)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts.

**Aufgabe 8.5:** Eine leere zylindrische Konservendose wiege 99 g, habe einen Durchmesser von 10 cm und eine Höhe von 11,5 cm. Unter der Annahme, dass die Nähte keine zusätzliche Masse hinzufügen, bestimmen Sie das Trägheitsmoment für die Zylinderachse.

**Aufgabe 8.6:** Ein Torsionspendel, dessen Feder, Achse und Querstange vergleichsweise geringe Massen haben, habe zwei Gewichte von jeweils 100 g im Abstand 20 cm zur Drehachse montiert. Bestimmen Sie für eine Spiralfeder mit Direktionsmoment 0,8 Nm die Resonanzfrequenz in Hz.

**Aufgabe 8.7:** Ein 373 mm langer Stab hängt an einem Ende an einem masselosen Drehgelenk, so dass er frei schwingen kann. Wie viele Schwingungen pro Sekunde übt dieser Stab bei geringer Auslenkung aus?

**Aufgabe 8.8:** Eine 2 kg wiegende runde Scheibe mit 30 cm Durchmesser rotiere um ihren Schwerpunkt mit der Drehachse senkrecht zur Fläche mit 3000 U/min. Wie hoch ist die in ihr gespeicherte Energie? Wie hoch müsste die Scheibe angehoben werden, so dass sich die gleiche potentielle Energie ergibt?

**Aufgabe 8.9:** Ein Torsionspendel habe ein Trägheitsmoment von 2 kg m<sup>2</sup> und eine Federkonstante von

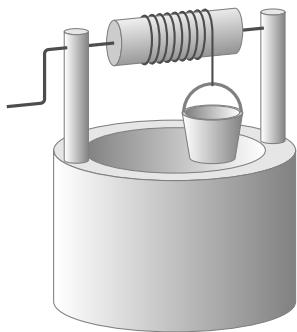
2 Nm. Bei einer maximalen Auslenkung von 1 rad, wie hoch ist die maximale Winkelgeschwindigkeit?

**Aufgabe 8.10:** Ein Motor gibt seine maximale Leistung von 60 kW bei einer Drehzahl von 6 000 U/min ab. Welches Drehmoment hat der Motor bei dieser Drehzahl?

**Aufgabe 8.11:** Eine massive Kugel mit 5 cm Durchmesser wird auf einer schrägen Ebene losgelassen. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit, nachdem sie 20 cm an Höhe verloren hat.

**Aufgabe 8.12:** Ein zylindrischer Satellit mit 1 t Masse habe einen Durchmesser von 1,5 m und rotiere um seine Zylinderachse mit 10 U/min. Für Servicearbeiten im All wird die Rotation durch zwei tangential montierte Triebwerke gestoppt, die jeweils eine Schubkraft von 10 N haben und unter einem Radius von 80 cm montiert sind. Unter der Annahme, dass die Masse im Satelliten gleichmäßig verteilt ist und die Triebwerke nicht nennenswert zum Trägheitsmoment beitragen, wie lange braucht der Satellit bis zum Stillstand?

**Aufgabe 8.13:** Eine zylinderförmige Holzwinde habe einen Durchmesser von 20 cm, wiege 5 kg und sei reibungslos über einem Brunnen montiert, siehe Abbildung unten. Um die Holzwinde sei ein annähernd masseloses Seil gewickelt, an dessen Ende ein voller Wassereimer mit Masse 12 kg geknotet ist. Wird die (masselose) Kurbel losgelassen, nach welcher Funktion bewegt sich der Eimer nach unten? Wann wird der Eimer den Grund des 5 m tiefen Brunnens erreicht haben?



**Aufgabe 8.14:** Eine kleine massive Kugel soll durch einen Looping mit 20 cm Durchmesser rollen, ohne dass sie von der Bahn abhebt. Wie hoch oberhalb des Loopings muss die Kugel mindestens starten, wenn jegliche Reibungsverluste vernachlässigt werden können?

# A. Lösungen zu den Aufgaben

## A.1. Messen, Maßsysteme und Vektoren

**Lösung 1.1:**

a)  $5 \text{ t} = 5 \text{ t} \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ t}} = \underline{\underline{5000 \text{ kg}}}$

b)  $2 \text{ cl} = 2 \text{ cl} \cdot \frac{1 \text{ l}}{100 \text{ cl}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ l}} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = \underline{\underline{20 \text{ cm}^3}}$

c)  $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \underline{\underline{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

d)  $70 \text{ mph} = 70 \frac{\text{mi}}{\text{h}} \cdot \frac{1609,344 \text{ m}}{1 \text{ mi}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \underline{\underline{31,2928 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

**Lösung 1.2:** Wir rechnen MPG in  $\frac{1}{100 \text{ km}}$  um. dafür müssen wir mit der Kehrwert der englischen Angabe arbeiten:

$$\frac{1}{42 \text{ MPG}} = \frac{1}{42} \frac{\text{gal}}{\text{mi}} \cdot \frac{4,546091}{1 \text{ gal}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{1,609344 \text{ km}} \\ \approx 0,0673 \frac{1}{\text{km}} = 6,73 \frac{1}{100 \text{ km}}$$

Antwort: Ihr PKW verbraucht mit  $6,1 \frac{1}{100 \text{ km}}$  weniger Benzin.

Vorsicht: Hätte das gleiche Gespräch mit einem US-Amerikaner stattgefunden, so wäre wegen der kleineren US-Gallone sein PKW mit  $5,60 \frac{1}{100 \text{ km}}$  sparsamer.

**Lösung 1.3:** a) Falsch: Strecke und Zeit können nicht addiert werden.

b) Korrekt: Es müssen nur die Einheiten der Strecken angepasst werden.

c) Falsch: Das Argument der Sinusfunktion darf keine Einheit haben.

d) Korrekt: Die Einheit *Meter* kann eliminiert werden.

**Lösung 1.4:** Alle vier Gleichungen sind korrekt.

**Lösung 1.5:**

$$\begin{aligned} \Delta s &= \left| \frac{\partial s}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial s}{\partial v_0} \right| \Delta v_0 + \left| \frac{\partial s}{\partial g} \right| \Delta g + \left| \frac{\partial s}{\partial t} \right| \Delta t \\ &= \Delta h + t \cdot \Delta v_0 + \frac{1}{2} t^2 \Delta g + |v_0 - gt| \Delta t \\ &= 5 \text{ cm} + 1 \text{ s} \cdot 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \text{ s}^2 \cdot 0,02 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &\quad + |2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s}| \cdot 10 \text{ ms} \\ &= 0,05 \text{ m} + 0,1 \text{ m} + 0,098 \text{ m} + 0,078 \text{ m} \\ &= 0,326 \text{ m} = \underline{\underline{32,6 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

**Lösung 1.6:**

a)  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx \underline{\underline{2,236}}$

$\varphi_a = \arg(\mathbf{a}) = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \arctan(2) \approx \underline{\underline{1,107}}$

b)  $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

$\varphi_b = \arg(\mathbf{B}) = -\frac{\pi}{2} \approx \underline{\underline{-1,571}}$

c)  $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \approx \underline{\underline{1,414}}$

$\varphi_c = \arg(\mathbf{c}) = \arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right) - \pi =$

$\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = -\frac{3\pi}{4} \approx \underline{\underline{-2,356}}$

**Lösung 1.7:**

a)  $a_x = a \cos \varphi_a = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{1}}$

$a_y = a \sin \varphi_a = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{1}}$

b)  $b_x = b \cos \varphi_b = 5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx \underline{\underline{4,330}}$

$b_y = b \sin \varphi_b = 5 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\underline{2,5}}$

c)  $c_x = c \cos \varphi_c = 1 \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \underline{\underline{-0,707}}$

$c_y = c \sin \varphi_c = 1 \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \underline{\underline{-0,707}}$

**Lösung 1.8:**

a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (2 + 1, 1 + (-1)) = \underline{\underline{(3, 0)}}$

b)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) = (2 - 1, 1 - (-1)) = \underline{\underline{(1, 2)}}$

c)  $4 \cdot \mathbf{a} = (4 \cdot a_x, 4 \cdot a_y) = (4 \cdot 2, 4 \cdot 1) = \underline{\underline{(8, 4)}}$

d)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{1}}$

e)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  kann nur dreidimensional gelöst werden:

$$= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= (a_y \cdot 0 - 0 \cdot b_y, 0 \cdot b_x - a_x \cdot 0, a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= (0, 0, 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = \underline{\underline{(0, 0, -3)}}$$

**Lösung 1.9:**

a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

$$= (3 + 1, 2 + 2, 1 + (-2)) = \underline{\underline{(4, 4, -1)}}$$

- b)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$   
 $= (3 - 1, 2 - 2, 1 - (-2)) = \underline{\underline{(2, 0, 3)}}$
- c)  $2 \cdot \mathbf{a} = (2 \cdot a_x, 2 \cdot a_y, 2 \cdot a_z) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 2, 2 \cdot 1)$   
 $= \underline{\underline{(6, 4, 2)}}$
- d)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$   
 $= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = \underline{\underline{5}}$
- e)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$   
 $= \underline{\underline{(-6, 7, 4)}}$

## A.2. Bewegung auf einer Geraden

**Lösung 2.1:** Wir rechnen in kartesische Koordinaten um wobei die Abszisse nach Osten und die Ordinate nach Norden zeigt:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= -\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \mathbf{e}_x + \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_0 &= \sqrt{8} \text{m} \mathbf{e}_x + \sqrt{8} \text{m} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}(2 \text{s}) &= \mathbf{v}_0 \cdot 2 \text{s} + \mathbf{r}_0 \\ &= (-\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \mathbf{e}_x + \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \mathbf{e}_y) \cdot 2 \text{s} \\ &\quad + (\sqrt{8} \text{m} \mathbf{e}_x + \sqrt{8} \text{m} \mathbf{e}_y) \\ &= (-\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{s} + \sqrt{8} \text{m}) \mathbf{e}_x \\ &\quad + (\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{s} + \sqrt{8} \text{m}) \mathbf{e}_y \\ &= 0 \text{m} \mathbf{e}_x + 4\sqrt{2} \text{m} \mathbf{e}_y = \underline{\underline{4\sqrt{2} \text{m} \mathbf{e}_y}}\end{aligned}$$

D.h. die Kugel befindet sich nach zwei Sekunden  $4\sqrt{2} \text{m} \approx 5,66 \text{m}$  in Richtung Nord.

**Lösung 2.2:**

$$\bar{v} = \frac{42,195 \text{ km}}{2 \cdot 3600 \text{ s} + 3 \cdot 60 \text{ s} + 38 \text{ s}} = \frac{42195 \text{ m}}{7418 \text{ s}} \approx \underline{\underline{5,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

**Lösung 2.3:**

$$t = \frac{s_{100}}{v_{Schall}} = \frac{100 \text{ m}}{340 \text{ m/s}} \approx \underline{\underline{0,294 \text{ s}}}$$

**Lösung 2.4:** Mit  $s_1$  und  $s_2$  als dem ersten und zweiten Streckenabschnitt,  $v_1$  und  $v_2$  als die Geschwindigkeit auf den entsprechenden Streckenabschnitten,  $t_1$  und  $t_2$  als die Dauer für besagte Strecken und  $t_{tot}$  und  $s_{tot}$  als die gesamte Zeit und Strecke folgt:

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_{tot} - s_2}{t_{tot} - t_2} = \frac{s_{tot} - s_2}{t_{tot} - \frac{s_2}{v_2}} \\ &= \frac{100 \text{ km} - 25 \text{ km}}{1 \text{ h} - \frac{25 \text{ km}}{50 \text{ km/h}}} = \frac{75 \text{ km}}{\frac{1}{2} \text{ h}} = \underline{\underline{150 \text{ km/h}}}\end{aligned}$$

**Lösung 2.5:** Wir definieren die Ruhelage des Gegenstandes als als Position null  $s_0 = 0$ , den Start des

Gegenstandes als Zeitpunkt null  $t_0 = 0$  und messen Strecke und Geschwindigkeit vertikal nach oben. Mit  $t_1$  für den Zeitpunkt, an dem der Gegenstand die Höhe von  $h = 10 \text{ m}$  erreicht und wieder umkehrt folgt für (2.8):

$$\begin{aligned}v(t_1) &= 0 = a_0 t_1 + v_0 = v_0 - g_0 t_1 \quad \text{es folgt:} \\ t_1 &= \frac{v_0}{g_0}\end{aligned}$$

Wir setzen die gefundene Gleichung in (2.9) ein:

$$\begin{aligned}s(t_1) &= h = \frac{a_0}{2} t_1^2 + v_0 t_1 + s_0 = -\frac{g_0}{2} t_1^2 + v_0 t_1 \\ &= -\frac{g_0}{2} \left( \frac{v_0}{g_0} \right)^2 + v_0 \frac{v_0}{g_0} = v_0^2 \left( \frac{1}{g_0} - \frac{1}{2g_0} \right) = \frac{v_0^2}{2g_0} \\ v_0 &= \sqrt{2h g_0} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx \underline{\underline{14,01 \text{ m/s}}}\end{aligned}$$

**Lösung 2.6:** Aus Symmetriegründen braucht der Ball genauso lange hoch zur Zeltdecke wie wieder herunter. Wir betrachten den freien Fall und messen die Zelthöhe von der Decke abwärts. Es folgt  $v_0 = 0$ , wir berücksichtigen die Abwurfhöhe mit  $s_0 = 1,2 \text{ m}$  und verwenden mit  $t_1 = 1,5 \text{ s}$  Gleichung (2.9):

$$\begin{aligned}s(t_1) &= \frac{a_0}{2} t_1^2 + v_0 t_1 + s_0 = \frac{g_0}{2} t_1^2 + s_0 \\ &= \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot 1,5^2 \text{ s}^2 + 1,2 \text{ m} \approx \underline{\underline{12,24 \text{ m}}}\end{aligned}$$

## A.3. Bewegung im Raum

**Lösung 3.1:**

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (4 \text{ m} \cdot \cos(\pi/4), 4 \text{ m} \cdot \sin(\pi/4)) \\ &= (4 \text{ m} \cdot \sqrt{1/2}, 4 \text{ m} \cdot \sqrt{1/2}) \\ &= (\sqrt{8}, \sqrt{8}) \text{ m} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{v} \cdot t = (v_x t, v_y t) = (-2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{2} \cdot 2 \text{s}, 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{2} \cdot 2 \text{s}) \\ &= (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) \text{ m} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\sqrt{8}, \sqrt{8}) \text{ m} + (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) \text{ m} \\ &= (0, \sqrt{32}) \text{ m} = (0, 4\sqrt{2}) \text{ m}\end{aligned}$$

Nach zwei Sekunden befindet sich die Kugel  $4\sqrt{2} \text{m}$  in Richtung Nord.

**Lösung 3.2:** Mit den Einheiten Sekunde und Meter folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (1|2|1) + 0,2 \cdot (0|0|2) + 0,5 \cdot (2|-2|0) \\ &\quad + 0,4 \cdot (0|0|-1) \\ &= (1 + 0,5 \cdot 2|2 - 0,5 \cdot 2|1 + 0,2 \cdot 2 - 0,4 \cdot 1) \\ &= \underline{\underline{(2|1|1)}}$$

**Lösung 3.3:** Die Beschleunigung ergibt eine Differenz von 3 m/s, die sich vollständig auf die gesamte Geschwindigkeit auswirkt. Daher ist der Winkel zwischen Beschleunigung und ursprünglicher Bewegung  $\underline{0^\circ}$ .

**Lösung 3.4:**

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_y &= a \cdot t = 2 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(250 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (40 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \approx \underline{\underline{253,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{250 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) \approx \underline{\underline{9,09^\circ}} \end{aligned}$$

**Lösung 3.5:**

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (3 + 2t + t^2)\mathbf{e}_x + (1 + 1,2t + 0,3t^2)\mathbf{e}_y \\ &= (3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + (2\mathbf{e}_x + 1,2\mathbf{e}_y)t + (\mathbf{e}_x + 0,3t^2\mathbf{e}_y)t^2 \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}_0}{2} t^2 \\ \mathbf{a} &= 2\mathbf{e}_x + 0,6t^2\mathbf{e}_y \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{2^2 + 0,6^2} \approx \underline{\underline{2,09}} \\ \varphi_0 &= \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \arctan\left(\frac{0,6}{2}\right) \approx \underline{\underline{16,7^\circ}} \end{aligned}$$

**Lösung 3.6:**

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r_x(t) \cdot \mathbf{e}_x + r_y(t) \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{r}_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \\ &= r_{0x} \mathbf{e}_x + r_{0y} \mathbf{e}_y + v_{0x} t \mathbf{e}_x + v_{0y} t \mathbf{e}_y \\ &\quad + \frac{a_x}{2} t^2 \mathbf{e}_x + \frac{a_y}{2} t^2 \mathbf{e}_y \\ &= (r_{0x} + v_{0x} t + \frac{a_x}{2} t^2) \mathbf{e}_x + (r_{0y} + v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2) \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Die Anfangsposition ist null. Am Kreuzungspunkt mit der y-Achse zum Zeitpunkt  $t_1$  ist  $r_x = 0$ .

$$\begin{aligned} r_x(t_1) &= 0 = v_{0x} t_1 + \frac{a_x}{2} t_1^2 \\ t_1 &= \left\{ 0, -\frac{2v_{0x}}{a_x} \right\} = \left\{ 0, -\frac{10}{-2} \right\} = \underline{\underline{0, 5}} \\ r_y(t_1) &= v_{0y} t_1 + a_y t_1^2 = 2t_1 + 1,5t_1^2 = \underline{\underline{0, 47, 5}} \\ \mathbf{v}(t_1) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t_1 = 5\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 2t_1 \mathbf{e}_x + 1,5t_1 \mathbf{e}_y \\ &= \underline{\underline{5\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y, -5\mathbf{e}_x + 9,5\mathbf{e}_y}} \end{aligned}$$

**Lösung 3.7:**

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t)| &= \left| \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{2} t^2 \right| = \left| v_0 t \mathbf{e}_x + \frac{a}{2} t^2 \mathbf{e}_y \right| \\ &= \sqrt{(v_0 t)^2 + \left(\frac{a}{2} t^2\right)^2} = t \sqrt{v_0^2 + \frac{1}{4} a^2 t^2} \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t = v_0 \mathbf{e}_x + a t \mathbf{e}_y \\ |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{v_0^2 + a^2 t^2} \end{aligned}$$

$$\varphi_v(t) = \arg(\mathbf{v}) = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{at}{v_0}\right)$$

Ggf. muss zum Winkel  $\varphi_v$  noch  $\pi$  addiert bzw. subtrahiert werden.

**Lösung 3.8:** Zu a): Da beide Äpfel zu Beginn eine vertikale Geschwindigkeit von null habe, kommen beide zur selben Zeit auf dem Boden an.

Zu b): Wir definieren den Boden unter der Abwurftelle als Koordinatenursprung  $\mathbf{r}_0 = 0$ , den Abwurzeitpunkt als  $t = 0$  und den Zeitpunkt des Aufpralls mit  $t_1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{2} t^2 = r_y \mathbf{e}_y + v_{0x} t \mathbf{e}_x - \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_y \\ r_y(t_1) &= 0 = r_y - \frac{g_0}{2} t_1^2 \\ t_1 &= \pm \sqrt{\frac{2r_y}{g_0}} \end{aligned}$$

Wir verwerfen die negative Lösung für  $t_1$ , da sie in der Vergangenheit liegt.

$$r_x(t_1) = v_{0x} t_1 = v_{0x} \sqrt{\frac{2r_y}{g_0}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx \underline{\underline{5,108 \text{ m}}}$$

**Lösung 3.9:** Koordinatenursprung: Boden unter dem Bogenschützen.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{2} t^2 = r_{0y} \mathbf{e}_y + v_{0x} t \mathbf{e}_x - \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_y \\ r_x(t_1) &= 22 \text{ m} = v_{0x} t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{r_x(t_1)}{v_{0x}} \\ r_y(t_1) &= 0 = r_{0y} - \frac{g_0}{2} t_1^2 \quad \Rightarrow \quad r_{0y} = \frac{g_0}{2} t_1^2 \\ r_{0y} &= \frac{g_0}{2} \left( \frac{r_x(t_1)}{v_{0x}} \right)^2 = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \left( \frac{22 \text{ m}}{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right)^2 \approx \underline{\underline{1,48 \text{ m}}} \end{aligned}$$

**Lösung 3.10:** Koordinatenursprung: Tintendüse, y-Achse nach unten.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{2} t^2 = v_{0x} t \mathbf{e}_x + \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_y \\ r_x(t_1) &= 1 \text{ mm} = v_{0x} t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{r_x(t_1)}{v_{0x}} \\ r_y(t_1) &= \frac{g_0}{2} t_1^2 = \frac{g_0}{2} \left( \frac{r_x(t_1)}{v_{0x}} \right)^2 = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \left( \frac{1 \text{ mm}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right)^2 \\ &\approx \underline{\underline{49 \text{ nm}}} \end{aligned}$$

**Lösung 3.11:** Koordinatenursprung: Start des Beobachtungszeitraums mit horizontaler Bewegung, y-Achse nach unten.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}}{2} t^2 = v_{0x} t \mathbf{e}_x + \frac{g_0}{2} t^2 \mathbf{e}_y \\ r_y(t_1) &= 0,9 \mu\text{m} = \frac{g_0}{2} t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2r_y(t_1)}{g_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_x(t_1) = 1 \text{ km} &= v_{0x} t_1 \quad \Rightarrow \quad v_{0x} = \frac{r_x(t_1)}{t_1} \\
v_{0x} &= r_x(t_1) \sqrt{\frac{g_0}{2r_y(t_1)}} = 1 \text{ km} \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,9 \mu\text{m}}} \\
&\approx \underline{\underline{2335 \text{ km/s}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2r_y(t_1) \sin(2\varphi_0) = 2 \cdot 15 \text{ m} \sin(2 \cdot 45^\circ) \\
&= \underline{\underline{30 \text{ m}}}
\end{aligned}$$

## A.4. Newtonsche Axiome

**Lösung 3.12:**

$$\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{r} \\
v &= \sqrt{ar} = \sqrt{g_0 r} = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m}} \\
&\approx \underline{\underline{22,15 \text{ m/s}}} \approx \underline{\underline{80 \text{ km/h}}}
\end{aligned}$$

**Lösung 3.13:**

$$\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{r} = \frac{2v^2}{d} = \frac{2(\pi d n)^2}{d} = 2\pi^2 d n^2 \\
&= 2\pi^2 \cdot 210 \text{ mm} \cdot 8000^2 \text{ min}^{-2} \\
&= 2\pi^2 \cdot 0,21 \text{ m} \cdot \left(\frac{400}{3}\right)^2 \text{ s}^{-2} \approx 73700 \text{ m/s}^2 \\
&\approx \underline{\underline{7500 g_0}}
\end{aligned}$$

**Lösung 3.14:**

$$\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r n)^2}{r} = 4\pi^2 r n^2 = \frac{g_0}{4} \\
r &= \frac{g_0}{4 \cdot 4\pi^2 n^2} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{16\pi^2 \left(\frac{100}{3}\right)^2 \text{ min}^{-2}} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{16\pi^2 \left(\frac{5}{9}\right)^2 \text{ s}^{-2}} \\
&\approx \underline{\underline{20,1 \text{ cm}}}
\end{aligned}$$

Bei einem Durchmesser von 30,48 cm kann sich der Käfer überall auf der Schallplatte halten.

**Lösung 3.15:** Wir legen den Koordinatenursprung auf die Abwurfstelle und definieren den Zeitpunkt des Abwurfs als  $t = 0$ . Wir bestimmen zunächst  $v_0$  für den senkrechten Fall:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_1) &= r_y(t_1) \mathbf{e}_y = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2 \\
&= v_0 t_1 \mathbf{e}_y - \frac{g_0}{2} t_1^2 \mathbf{e}_y \\
\mathbf{v}(t_1) &= 0 = \mathbf{v}_0 + a \mathbf{t}_1 = v_0 \mathbf{e}_y - g_0 t_1 \mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \\
t_1 &= \frac{v_0 \mathbf{e}_y}{g_0 \mathbf{e}_y} = \frac{v_0}{g_0} \\
r_y(t_1) &= v_0 t_1 - \frac{g_0}{2} t_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \pm \sqrt{2r_y(t_1) g_0}
\end{aligned}$$

Wir verwenden das positive Vorzeichen, damit der Wurf in die Zukunft erfolgt. Jetzt setzen wir  $v_0$  in Gleichung (6) ein und maximieren die Wurfweite durch einen Abwurfwinkel von  $\varphi_0 = 45^\circ$ :

$$r_{1x} = \frac{v_0^2}{g_0} \sin(2\varphi_0) = \frac{2r_y(t_1)g_0}{g_0} \sin(2\varphi_0)$$

**Lösung 4.1:**

$$\begin{aligned}
BMI &= \frac{m}{h^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} = \frac{11 \text{ st} + 9 \text{ lb}}{(5 \text{ ft} + 11,5 \text{ in})^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \\
&= \frac{11 \cdot 14 \text{ lb} + 9 \text{ lb}}{(5 \text{ ft} + \frac{11,5}{12} \text{ ft})^2} \cdot \frac{\frac{0,4536 \text{ kg}}{1 \text{ lb}}}{\left(\frac{0,3048 \text{ m}}{1 \text{ ft}}\right)^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \\
&= \frac{163 \text{ lb}}{5,958^2 \text{ ft}^2} \cdot \frac{0,4536 \text{ kg ft}^2}{0,3048^2 \text{ lb m}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \\
&= \frac{73,94 \text{ kg}}{1,816^2 \text{ m}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} = \underline{\underline{22,4}}
\end{aligned}$$

**Lösung 4.2:**

$$\begin{aligned}
F &= m a = m \frac{v}{t} = 1,1 \text{ t} \cdot \frac{36 \text{ km/h}}{5 \text{ s}} \\
&= 1,1 \text{ t} \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ t}} \cdot \frac{36 \text{ km/h} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}}}{5 \text{ s}} \\
&= 1100 \text{ kg} \cdot \frac{10 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = 2200 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{2200 \text{ N}}}
\end{aligned}$$

**Lösung 4.3:**

$$\begin{aligned}
m_B &= m_t - m_0 = \frac{F}{a} - m_0 = \frac{1 \text{ N}}{4 \text{ m/s}^2} - 100 \text{ g} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} - 100 \text{ g} = \underline{\underline{150 \text{ g}}}
\end{aligned}$$

**Lösung 4.4:**

$$\begin{aligned}
F &= m \omega^2 r = m (2\pi n)^2 r \\
&= 50 \text{ g} \cdot (2\pi 3600 \text{ min}^{-1})^2 \cdot 20 \text{ cm} \\
&= 0,05 \text{ kg} \cdot 4\pi^2 \cdot 60^2 \text{ s}^{-2} \cdot 0,2 \text{ m} \\
&= 1420 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{1420 \text{ N}}}
\end{aligned}$$

Zentrifugalkraft  $F_{ZF}$  zeigt nach außen.

Zentripetalkraft  $F_{ZP}$  zeigt nach innen.

**Lösung 4.5:**

$$m = \frac{F}{\omega^2 r} = \frac{100 \text{ N}}{10^2 \text{ s}^{-2} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{1 \text{ kg}}}$$

**Lösung 4.6:**

$$v_2 = a_2 \cdot t_2 = \frac{F_2}{m} \cdot t_2 = \frac{2 \cdot F_1}{m} \cdot t_2 = \frac{2 \cdot m \cdot a_1}{m} \cdot t_2$$

$$= 2 \cdot \frac{v_1}{t_1} \cdot t_2 = \frac{2 \cdot t_2}{t_1} \cdot v_1 = \frac{2 \cdot 6 \text{ s}}{12 \text{ s}} \cdot 1,4 \text{ m/s}$$

$$= \underline{\underline{1,4 \text{ m/s}}} = \underline{\underline{\underline{v_1}}}$$

**Lösung 4.7:**

$$\begin{aligned} F_x &= F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 = F_3 \cos \varphi_3 \\ &= 50 \text{ N} \cos 0^\circ + 80 \text{ N} \cos 120^\circ + 100 \text{ N} \cos -120^\circ \\ &= 50 \text{ N} \cdot 1 - 80 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} - 100 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} = -40 \text{ N} \\ F_y &= F_1 \sin \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_2 = F_3 \sin \varphi_3 \\ &= 50 \text{ N} \sin 0^\circ + 80 \text{ N} \sin 120^\circ + 100 \text{ N} \sin -120^\circ \\ &= 50 \text{ N} \cdot 0 + 80 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -10\sqrt{3} \text{ N} \\ |\mathbf{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-40)^2 \text{ N}^2 + (10\sqrt{3})^2 \text{ N}^2} \\ &= 10\sqrt{19} \text{ N} \approx \underline{\underline{43,6 \text{ N}}} \\ \varphi &= \arg \mathbf{F} = \arctan \frac{F_y}{F_x} - 180^\circ \\ &= \arctan \frac{-10\sqrt{3} \text{ N}}{-40 \text{ N}} - 180^\circ = \underline{\underline{-156,5^\circ}} \end{aligned}$$

**Lösung 4.8:** Die Kraftkomponenten quer zur Bewegung müssen sich aufheben.

$$\begin{aligned} F_{2y} &= F_{1y} \\ F_2 \sin \varphi_2 &= F_1 \sin \varphi_1 \\ 2 \cdot F_1 \sin \varphi_2 &= F_1 \sin \varphi_1 \\ 2 \cdot \sin \varphi_2 &= \sin \varphi_1 \\ \varphi_2 &= \arcsin \left( \frac{\sin \varphi_1}{2} \right) \end{aligned}$$

**Lösung 4.9:** Es muss die Reibungskraft  $F_{R0}$  bzw.  $F_R$  überwunden werden:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad F_{R0} &= \mu_0 F_N = \mu_0 m g_0 = 0,15 \cdot 1 \text{ t} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= \underline{\underline{1,47 \text{ kN}}} \\ \text{b)} \quad F_R &= \mu F_N = \mu m g_0 = 0,1 \cdot 1 \text{ t} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= \underline{\underline{981 \text{ N}}} \end{aligned}$$

**Lösung 4.10:**

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \tan(9^\circ) = \underline{\underline{0,158}} \\ \mu &= \tan(7^\circ) = \underline{\underline{0,123}} \end{aligned}$$

## A.5. Arbeit, Energie und Leistung

**Lösung 5.1:**

$$W = F \Delta r = 240 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = \underline{\underline{1200 \text{ J}}}$$

**Lösung 5.2:**

a)

$$\begin{aligned} W &= F_x \Delta r = |\mathbf{F}_1| \cos \varphi_1 \cdot \Delta r \\ &= 20 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ \cdot 500 \text{ m} = \underline{\underline{5000 \text{ J}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_2| &= \frac{F_x}{\cos \varphi_2} = \frac{|\mathbf{F}_1| \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \\ &= \frac{20 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ N} \approx \underline{\underline{11,5 \text{ N}}} \end{aligned}$$

**Lösung 5.3:**

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{117 \text{ kg}}{2} (24 \text{ km/h})^2 = \frac{117 \text{ kg}}{2} (6 \frac{2}{3} \text{ m/s})^2 \\ &= \underline{\underline{2600 \text{ J}}} \\ W_2 &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{1,44 \text{ t}}{2} (120 \text{ km/h})^2 \\ &= \frac{1440 \text{ kg}}{2} (33 \frac{1}{3} \text{ m/s})^2 = 800000 \text{ J} = \underline{\underline{800 \text{ kJ}}} \\ W_3 &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{2\pi r}{t} \right)^2 \\ &= \frac{5,9737 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2} \left( \frac{2\pi 149600000 \text{ km}}{1 \text{ a}} \right)^2 \\ &= \frac{5,9737 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2} \left( \frac{2\pi 149,6 \cdot 10^9 \text{ m}}{365 \frac{1}{4} \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \right)^2 \\ &= \underline{\underline{2,650 \cdot 10^{33} \text{ J}}} \end{aligned}$$

**Lösung 5.4:**

$$\begin{aligned} t &= \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{F}{m}} = \frac{vm}{F} = \frac{100 \text{ km/h} \cdot 450 \text{ t}}{200 \text{ kN}} \\ &= \frac{27 \frac{7}{9} \text{ m/s} \cdot 450000 \text{ kg}}{200000 \text{ N}} = \underline{\underline{62,5 \text{ s}}} \end{aligned}$$

**Lösung 5.5:**

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= mg_0 h = 5 \text{ t} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} \\ &= 5000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 49050 \text{ J} = \underline{\underline{49,05 \text{ kJ}}} \end{aligned}$$

**Lösung 5.6:**

$$E_{\text{pot}} = mg_0 h = 110 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 500 \text{ m} = \underline{\underline{540 \text{ kJ}}}$$

**Lösung 5.7:**

$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2} \Delta l^2 = \frac{12 \text{ kN}}{2} (20 \text{ cm})^2 = \frac{12000 \text{ N}}{2} (0,2 \text{ m})^2$$

$$= \underline{\underline{240 \text{ J}}}$$

### Lösung 5.8:

$$\begin{aligned} v & \stackrel{E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2}{=} \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{m}} \stackrel{E_{\text{pot}} = \frac{D}{2} \Delta l^2}{=} \sqrt{\frac{2 \frac{D}{2} \Delta l^2}{m}} \\ & = \sqrt{\frac{D \Delta l^2}{m}} = \sqrt{\frac{1 \text{ kN/m} \cdot (10 \text{ cm})^2}{100 \text{ g}}} = \underline{\underline{10 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

### Lösung 5.9:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot}} = mg_0 h = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = \underline{\underline{7,36 \text{ kJ}}} \\ v &= \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2mg_0 h}{m}} = \sqrt{2g_0 h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} = \underline{\underline{14 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

### Lösung 5.10:

$$v = \frac{P}{F} = \frac{\eta P_0}{mg_0} = \frac{0,7 \cdot 3 \text{ kW}}{1 \text{ t} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{21,4 \text{ cm/s}}}$$

### Lösung 5.11:

$$P = Fv = 420 \text{ N} \cdot 120 \text{ km/h} = \underline{\underline{14 \text{ kW}}}$$

**Lösung 5.12:** Wir verwenden  $k$  als Proportionalitätsfaktor:

$$\begin{aligned} W_a &= F_a \cdot \Delta r = kv_a^2 \cdot v_a t = ktv_a^3 \\ W_b &= F_{b1} \cdot \Delta r_2 + F_{b1} \cdot \Delta r_2 = kv_{b1}^2 \cdot v_{b1} \frac{t}{2} + kv_{b2}^2 \cdot v_{b2} \frac{t}{2} \\ &= k \frac{t}{2} (v_{b1}^3 + v_{b2}^3) \\ \frac{W_b}{W_a} &= \frac{k \frac{t}{2} (v_{b1}^3 + v_{b2}^3)}{ktv_a^3} = \frac{v_{b1}^3 + v_{b2}^3}{2v_a^3} \\ &= \frac{(50 \text{ km/h})^3 + (150 \text{ km/h})^3}{2(100 \text{ km/h})^3} = \underline{\underline{1,75}} \end{aligned}$$

### Lösung 5.13:

$$\begin{aligned} d &= \frac{v^2}{g_0} \sin(2\varphi) \stackrel{E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2}{=} \frac{2E_{\text{kin}}}{g_0} \sin(2\varphi) \\ &= \frac{2E_{\text{kin}}}{mg_0} \sin(2\varphi) = \frac{2 \cdot 5000 \text{ J}}{5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \sin(2 \cdot 45^\circ) \\ &= \underline{\underline{204 \text{ m}}} \end{aligned}$$

## A.6. Impuls und Stoß

### Lösung 6.1:

$$p = mv = 1 \text{ t} \cdot 90 \text{ km/h} = 1000 \text{ kg} \cdot 25 \text{ m/s} = \underline{\underline{25 \text{ kNs}}}$$

### Lösung 6.2:

$$\begin{aligned} p &= Ft = 10 \text{ N} \cdot 5 \text{ s} = \underline{\underline{50 \text{ Ns}}} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(Ft)^2}{2m} = \frac{(10 \text{ N} \cdot 5 \text{ s})^2}{2 \cdot 10 \text{ kg}} = \underline{\underline{125 \text{ J}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.3:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta p = \sqrt{2mE_{\text{kin}0}} + \Delta p \\ &= \sqrt{2 \cdot 6 \text{ kg} \cdot 3 \text{ J}} + 6 \text{ Ns} = \underline{\underline{12 \text{ Ns}}} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(12 \text{ Ns})^2}{2 \cdot 6 \text{ kg}} = \underline{\underline{12 \text{ J}}} \\ v &= \frac{p}{m} = \frac{12 \text{ Ns}}{6 \text{ kg}} = \underline{\underline{2 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.4:

$$\begin{aligned} p &= mv = 0,17 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} = \underline{\underline{1,7 \text{ Ns}}} \\ \bar{F} &= \frac{p}{t} = \frac{1,7 \text{ Ns}}{0,02 \text{ s}} = \underline{\underline{85 \text{ N}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.5:

$$\begin{aligned} p &= mv = 57 \text{ g} \cdot 251,4 \text{ km/h} = 0,057 \text{ kg} \cdot \frac{419}{6} \text{ m/s} \\ &= \underline{\underline{3,9805 \text{ Ns}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.6:

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \stackrel{v_2 = 0}{=} \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2 \cdot 0,43 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}}{1000 \text{ kg} + 0,43 \text{ kg}} = 1,72 \text{ cm/s} = \underline{\underline{0,062 \text{ km/h}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.7:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1,2 \text{ t} \cdot 50 \text{ km/h} + 16 \text{ t} \cdot 70 \text{ km/h}}{1,2 \text{ t} + 16 \text{ t}} \\ &= \underline{\underline{68,6 \text{ km/h}}} \end{aligned}$$

### Lösung 6.8:

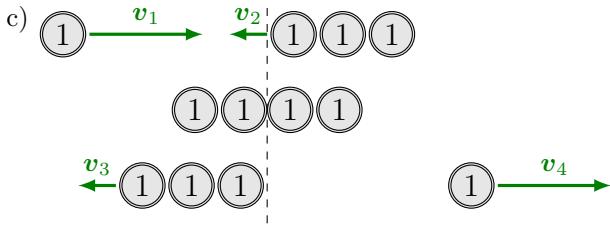
$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{v_2} &= \frac{v' - v_2}{v_2} = \frac{v'}{v_2} - 1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{v_2(m_1 + m_2)} - 1 \\ &= \frac{7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1,023 \text{ km/s} + 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 29,78 \text{ km/s}}{29,78 \text{ km/s} \cdot (7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg} + 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg})} - 1 \\ &= 0,0126 = \underline{\underline{1,26 \%}} \end{aligned}$$

**Lösung 6.9:** Aus der Auslenkung  $\varphi$  mit Pendellänge  $l$  ergibt sich die Höhe  $h = l(1 - \cos \varphi)$ .

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g_0 h} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g_0 l(1 - \cos \varphi)} \\ &= \frac{7,5 \text{ g} + 2000 \text{ g}}{7,5 \text{ g}} \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} \cdot (1 - \cos 27,6^\circ)} \\ &= \underline{\underline{400 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

**Lösung 6.10:** a) Die rechte Münze bewegt sich mit  $v_1$  die anderen liegen still.

b)  $v_B = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = \frac{mv_1}{4m} = \underline{\underline{\frac{v_1}{4}}}$



**Lösung 6.11:**

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 3000 \text{ m}^{-1} = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{314,2 \text{ s}^{-1}}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}}{1,2 \text{ s}} = \underline{\underline{261,8 \text{ s}^{-2}}}$$

**Lösung 6.12:**

$$M = F l = mg_0 l = 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m} = \underline{\underline{9,81 \text{ Nm}}}$$

**Lösung 6.13:**

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{4 \text{ m/s}}{0,2 \text{ m}} = \underline{\underline{20 \text{ s}^{-1}}}$$

$$J = mr^2 = 0,5 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 = \underline{\underline{20 \text{ g m}^2}}$$

$$L = J\omega = 0,02 \text{ kg m}^2 \cdot 20 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{0,4 \text{ Js}}}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2}\omega^2 = \frac{0,02 \text{ kg m}^2}{2} (20 \text{ s}^{-1})^2 = \underline{\underline{4 \text{ J}}}$$

**Lösung 6.14:**

$$L = dp = dm v = 0,2 \text{ m} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} = \underline{\underline{0,6 \text{ Js}}}$$

$$J = mr^2 = 1 \text{ kg} \cdot 0,2^2 \text{ m}^2 = \underline{\underline{0,04 \text{ kg m}^2}}$$

**Lösung 6.15:**

$$h = \frac{E_{\text{pot}}}{mg_0} = \frac{E_{\text{rot}}}{mg_0} = \frac{J}{2mg_0} \omega^2 \stackrel{L=J\omega}{=} \frac{J}{2mg_0} \cdot \left(\frac{L}{J}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{L^2}{2Jmg_0} = \frac{L^2}{2mr^2mg_0} = \frac{L^2}{2m^2r^2g_0} \\ &= \frac{(2 \text{ Js})^2}{2 \cdot (0,2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m})^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{5,10 \text{ m}}} \end{aligned}$$

**Lösung 6.16:** Da die benötigte Kraft zur Reduzierung der Fadenlänge radial wirkt bleibt der Drehimpuls unverändert.

$$\begin{aligned} L_{0,5} &= L_1 \\ J_{0,5} \omega_{0,5} &= J_1 \omega_1 \\ mr_{0,5}^2 \omega_{0,5} &= mr_1^2 \omega_1 \\ \omega_{0,5} &= \omega_1 \frac{r_1^2}{r_{0,5}^2} = 1 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{0,25 \text{ m}^2} = \underline{\underline{4 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

**Lösung 6.17:** Drehimpulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_0 \\ J_1 \omega_1 &= J_0 \omega_0 \\ \omega_1 &= \omega_0 \frac{J_0}{J_1} = \omega_0 \frac{J_0}{J_0 + mr^2} \\ &= \frac{1}{3} \text{ s}^{-1} \frac{100 \text{ kg m}^2}{100 \text{ kg m}^2 + 25 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}^2} \\ &= \frac{4}{15} \text{ s}^{-1} \approx \underline{\underline{0,267 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

**Lösung 6.18:**

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad M = J \alpha$$

$$\Delta \omega = 2\pi \cdot 3000 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 100\pi \text{ s}^{-1}$$

$$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{M \Delta t}{\Delta \omega} = \frac{10 \text{ Ncm} \cdot 10 \text{ s}}{100\pi \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{3,18 \text{ g m}^2}}$$

## A.7. Schwingungen

**Lösung 7.1:**

$$T = 3,6 \text{ s}$$

$$t_1 = 6,3 \text{ s} = \frac{6,3}{3,6} T = 1\frac{3}{4} T$$

Die Kugel befindet sich gerade in ihrer Ruheposition.

**Lösung 7.2:**

$$\text{DGL: } m\ddot{s} + Ds = 0$$

$$\text{Ansatz: } s(t) = \hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\dot{s}(t) = \hat{s} i \omega e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\ddot{s}(t) = -\hat{s} \omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\text{Einsetzen: } -m\hat{s}\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)} + D\hat{s} e^{i(\omega t + \varphi_0)} = 0$$

$$-m\omega^2 + D = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$\hat{s}$  und  $\varphi_0$  ergeben sich durch die Startbedingungen.

### Lösung 7.3:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \text{ N/m}}{0,1 \text{ kg}}} = \frac{5}{\pi} \text{ s}^{-1} \\ &= \underline{\underline{1,59 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

### Lösung 7.4:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{1,5625 \cdot m_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1,5625}} = f_0 \cdot \frac{4}{5} = 100 \text{ Hz} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \underline{\underline{80 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

### Lösung 7.5:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \tilde{s} \cdot \sqrt{2} = 230 \text{ V} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{325 \text{ V}}} \\ \bar{s} &= \frac{2 \cdot \hat{s}}{\pi} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \hat{s}}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \cdot 230 \text{ V} = \underline{\underline{207 \text{ V}}} \end{aligned}$$

### Lösung 7.6:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \omega \cdot \hat{s} = 2\pi f \cdot \hat{s} = 2\pi 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ nm} = \underline{\underline{62,8 \mu\text{ms}}} \\ \hat{a} &= \omega^2 \cdot \hat{s} = 4\pi^2 f^2 \cdot \hat{s} = 4\pi^2 1000^2 \text{ s}^{-2} \cdot 10 \text{ nm} \\ &= \underline{\underline{395 \text{ mm/s}^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Mittelwerte: } \bar{s} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{s}$$

$$\text{Effektivwerte: } \tilde{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{s}$$

	Scheitelw.	Mittelwert	Effektivw.
Position	10 nm	6,37 nm	7,07 nm
Geschw.	62,8 $\mu\text{m/s}$	40,0 $\mu\text{m/s}$	44,4 $\mu\text{m/s}$
Beschl.	395 $\text{mm/s}^2$	251 $\text{mm/s}^2$	279 $\text{mm/s}^2$

### Lösung 7.7:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g_0}{l}} \\ l &= \frac{g_0}{\omega^2} = \frac{g_0}{(2\pi \frac{1}{T})^2} = \frac{g_0}{4\pi^2} T^2 = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi} \cdot (5 \text{ s})^2 \\ &= \underline{\underline{6,21 \text{ m}}} \end{aligned}$$

### Lösung 7.8:

Abklingkonstante  $\delta$ :

$$\hat{s}(4T) = \hat{s}(0) \cdot e^{-4\delta T} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{4T} \cdot \ln \frac{\hat{s}(0)}{\hat{s}(4T)} = \frac{1}{4 \cdot 20 \text{ ms}} \cdot \ln \frac{10}{60} = \underline{\underline{6,39 \text{ s}^{-1}}}$$

Dämpfungsverhältnis  $K$ :

$$K = \frac{\hat{s}(0)}{\hat{s}(T)} = \frac{100}{88} = \underline{\underline{1,136}}$$

Dämpfungsgrad  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega} = \frac{\delta \cdot T}{2\pi} = \frac{6,39 \text{ s}^{-1} \cdot 0,02 \text{ s}}{2\pi} = \underline{\underline{0,0203}}$$

Amplitude nach 1 s

$$\hat{s}(1 \text{ s}) = \hat{s}(0) \cdot e^{-\delta \cdot 1 \text{ s}} = 100 \cdot e^{-6,39 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ s}} = \underline{\underline{0,169}}$$

### Lösung 7.9:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{1}{40 \text{ mm/Ns}} = 25 \text{ Ns/m}$$

$$\text{a) } f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2m^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{2m^2}} \\ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2000 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}} - \frac{(25 \text{ Ns/m})^2}{2 \cdot (0,5 \text{ kg})^2}} = \underline{\underline{8,346 \text{ Hz}}}$$

$$\text{b) } \frac{\hat{s}(f_r)}{\hat{s}(0)} = \frac{\frac{\hat{F}_A}{\sqrt{m^2(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_r^2}}}{\frac{\hat{F}_A}{\sqrt{m^2(0^2 - \omega_0^2)^2 + k^20^2}}} \\ = \frac{m\omega_0^2}{\sqrt{m^2(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_r^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{mD} - \left(\frac{k^2}{2mD}\right)^2}} = 1,377 \hat{=} 37,7 \%$$

$$\text{c) } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{2m^2}} = 0$$

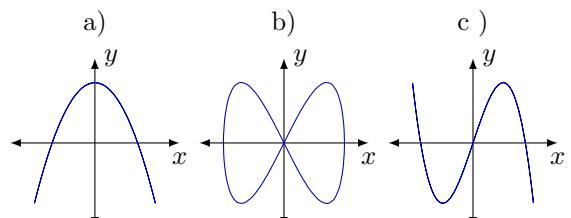
$$\omega_0^2 = \frac{k^2}{2m^2}$$

$$k = \sqrt{2m^2\omega_0^2} = \sqrt{2mD}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 0,5 \text{ kg} \cdot 2000 \text{ m/Ns}} = 44,72 \text{ Ns/m}$$

$$R = \frac{1}{k} = \underline{\underline{22,36 \text{ mm/Ns}}}$$

### Lösung 7.10:



**Lösung 7.11:**

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{C_{ms} \cdot m}} \\ = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{0,00123 \text{ m/N} \cdot 0,0135 \text{ kg}}} = \underline{\underline{39 \text{ Hz}}}$$

$$r_{sx} = \frac{10 \text{ g} \cdot 1 + 40 \text{ g} \cdot 1}{10 \text{ g} + 20 \text{ g} + 30 \text{ g} + 40 \text{ g}} = 0.5 \\ r_{sy} = \frac{20 \text{ g} \cdot 1 + 40 \text{ g} \cdot 1}{10 \text{ g} + 20 \text{ g} + 30 \text{ g} + 40 \text{ g}} = 0.6 \\ r_{sy} = \frac{30 \text{ g} \cdot 1 + 40 \text{ g} \cdot 1}{10 \text{ g} + 20 \text{ g} + 30 \text{ g} + 40 \text{ g}} = 0.7 \\ \underline{\underline{r_s = (0,5; 0,6; 0,7)}}$$

## A.8. Starre Körper

**Lösung 8.1:** Wir verschieben die erste Kraft auf die y-Achse und addieren zwei sich kompensierende vertikale Hilfskräfte von 1 N:

Position	Kraft	Geradengleichung
(0;1;0)	(4;1;0) N	$y_1 = \frac{1}{4}x + 1$
(0;-2;0)	(2;-1;0) N	$y_2 = -\frac{1}{2}x - 2$

Die beiden Geraden müssen sich kreuzen:

$$y_1 = y_2 \\ \frac{1}{4}x + 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \\ x = -4 \\ y = \frac{1}{4}x + 1 = 0$$

Die resultierende Kraft ist die Summe der beiden Teilkräfte

$$F_s = F_1 + F_2 = \underline{\underline{6 \text{ N}}},$$

die irgendwo entlang der x-Achse, z.B. im Koordinatenursprung, angreift:

$$\underline{\underline{r_s = (x; 0; 0)}}$$

**Lösung 8.2:**

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= (r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z) \times (F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) \\ M_z &= r_x F_y - r_y F_x \\ M_z &= M_{z1} + M_{z2} \\ &= r_{x1} F_{y1} - r_{y1} F_{x1} + r_{x2} F_{y2} - r_{y2} F_{x2} \\ &= 0,01 \text{ m} \cdot (-1 \text{ N}) + (-0,01 \text{ m}) \cdot (-2 \text{ N}) \\ &= \underline{\underline{0,01 \text{ Nm}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.3:** Mit der linken Masse  $m_2$  im Koordinatenursprung folgt  $x_1 = 1 \text{ m}$  und  $x_2 = 0 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} + 5 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m}}{2 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} \\ &= \frac{2}{7} \text{ m} = \underline{\underline{28,6 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

gemessen von der linken Masse  $m_2$ .

**Lösung 8.4:**

$$\underline{\underline{r_s = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}}}$$

**Lösung 8.5:** Wir teilen die Masse über die Flächen auf Zylindermantel und Boden/Deckel auf:

$$\begin{aligned} m_M &= m \frac{A_M}{A_M + A_{BD}} = m \frac{\pi d h}{\pi d h + 2\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{2mh}{2h+d} \\ m_M &= 69 \text{ g} \quad m_{BD} = 30 \text{ g} \\ J &= J_M + J_G = m_M r^2 + \frac{m_{BD} d^2}{2} \\ &= \frac{m_M d^2}{4} + \frac{m_{BD} d^2}{8} \\ &= \frac{69 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm}^2}{4} + \frac{30 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm}^2}{8} = \underline{\underline{2,10 \text{ kg cm}^2}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.6:**

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_m}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_m}{2mr^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0,8 \text{ Nm}}{2 \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot 0,2^2 \text{ m}^2}} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz} = \underline{\underline{1,59 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.7:**

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg_0 l}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg_0 \frac{L}{2}}{\frac{m}{3} L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g_0}{2L}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,373 \text{ m}}} = \underline{\underline{1,000 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.8:**

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{J}{2} \omega^2 = \frac{\frac{m}{2} r^2}{2} 4\pi^2 n^2 = \frac{md^2}{4} \pi^2 n^2 \\ &= \frac{2 \text{ kg} \cdot 0,3^3 \text{ m}^2}{4} \pi^2 \cdot 50^2 \text{ s}^{-2} = \underline{\underline{1110 \text{ J}}} \\ h &= \frac{E_{\text{rot}}}{mg_0} = \frac{1110 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{56,6 \text{ m}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.9:**

$$\begin{aligned} \omega &\stackrel{E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2}{=} \sqrt{\frac{2E_{\text{rot}}}{J}} \stackrel{E_{\text{rot}} = E_{\text{pot}}}{=} \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{J}} = \sqrt{\frac{2 \frac{D_m}{2} \varphi^2}{J}} \\ &= \sqrt{\frac{D_m \varphi^2}{J}} = \sqrt{\frac{2 \text{ Nm} \cdot 1^2}{2 \text{ kg m}^2}} = \underline{\underline{1 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.10:**

$$M = \frac{P_{\text{rot}}}{\omega} = \frac{P_{\text{rot}}}{2\pi n} = \frac{60\,000 \text{ W}}{2\pi \cdot 100 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{95,5 \text{ Nm}}}$$

**Lösung 8.11:**

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} + E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot}} \\ \frac{J}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}v^2 &= mg_0h \\ \frac{\frac{2m}{5}r^2}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}v^2 &= mg_0h \\ \frac{r^2}{5}\omega^2 + \frac{v^2}{2} &= g_0h \\ \frac{v^2}{5} + \frac{v^2}{2} &= g_0h \\ v &= \sqrt{\frac{10g_0h}{7}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m}}{7}} \\ &= \underline{\underline{1,67 \text{ m/s}}} \\ \omega &= \frac{v}{r} = \frac{2v}{d} = \frac{2 \cdot 1,67 \text{ m/s}}{0,05 \text{ m}} = \underline{\underline{67,0 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.12:**

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi n}{\frac{M}{J}} = \frac{2\pi n J}{M} = \frac{2\pi n \frac{m}{2} r_S^2}{2F_T r_T} = \frac{\pi n m d_S^2}{8F_T r_T} \\ &= \frac{\pi \frac{1}{6} \text{ s}^{-1} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 1,5^2 \text{ m}^2}{8 \cdot 10 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ m}} = \underline{\underline{18,4 \text{ s}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.13:**

$$\begin{aligned} F_T + F_W &= F_0 \\ m_E a + \frac{M}{r_W} &= m_E g_0 \\ m_E a + \frac{J\alpha}{r_W} &= m_E g_0 \\ m_E a + \frac{\frac{m_W}{2} r_W^2 \cdot \frac{a}{r_W}}{r_W} &= m_E g_0 \\ m_E a + \frac{m_W a}{2} &= m_E g_0 \\ a &= \frac{m_E g_0}{m_E + \frac{m_W}{2}} = \frac{g_0}{1 + \frac{m_W}{2m_E}} \end{aligned}$$

Für eine konstante Beschleunigung folgt:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \frac{a}{2} t^2 = \underline{\underline{\frac{m_E g_0 t^2}{2m_E + m_W}}} \\ t(s_1) &= \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2s_1(1 + \frac{m_W}{2m_E})}{g_0}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ m} \cdot (1 + \frac{5 \text{ kg}}{2 \cdot 12 \text{ kg}})}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{1,11 \text{ s}}} \end{aligned}$$

**Lösung 8.14:** Bei min. Geschwindigkeit gleichen sich Zentripetalkraft und Gewichtskraft, bzw. Erdbeschleunigung und Zentripetalbeschleunigung. Mit  $a = \frac{v^2}{r}$  folgt:

$$\begin{aligned} v^2 &= g_0 r_L = \frac{g_0 d_L}{2} \\ E_{\text{pot}} &= E_{\text{rot}} + E_{\text{kin}} \\ mg_0 h &= \frac{J}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} v^2 \\ mg_0 h &= \frac{\frac{2m}{5} r_K^2}{2} \cdot \frac{v^2}{r_K^2} + \frac{m}{2} v^2 \\ g_0 h &= \frac{v^2}{5} + \frac{v^2}{2} = \frac{7v^2}{10} = \frac{7g_0 d_L}{20} \\ h &= \frac{7d_L}{20} = \frac{7 \cdot 20 \text{ cm}}{20} = \underline{\underline{7 \text{ cm}}} \end{aligned}$$