Berechnung von geschlossenen Lautsprecherboxen

Dr. Robert Heß
Lehrbeauftragter an der HAW-Hamburg
Fachbereich Medientechnik

31. Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die meistverwendete Form eines Lautsprechers besteht aus einer Membran, die durch einen geeigneten Antrieb in Bewegung versetzt wird, und dadurch Schall erzeugt, indem es die umgebende Luft in Schwingung versetzt. Dabei muss vermieden werden, dass sich der auf der Rückseite erzeugte gegenphasige Schall sich mit dem Schall der Vorderseite vermischt und diesen kompensiert.

Bis in die frühen 50er Jahre wurde primär das Prinzip der unendlichen Schallwand verwendet. Ein Lautsprecher wird ein eine möglichst große Wand montiert, so dass der rückwärtige Schall einen deutlich längeren Weg zum Hörer hat. In einem solchen System spielt das Gehäuse eine eher unbedeutende Rolle, und die Übertragungseigenschaften werden von dem Lautsprecherchassis mit seiner schwingenden Masse, der Aufhängung und den Verlusten vorgegeben.

Im Jahr 1949 wurde nach einem Patent von H. Olson und J. Preston die sogenannte *akustische Aufhängung* eingeführt. Das Lautsprecherchassis wird dabei in ein geschlossenes Gehäuse montiert, so dass der rückwärtige Schall nicht zum Hörer gelangt. Das durch die Membranbewegung variirende Gehäusevolumen führt zu einer Variation des Luftdrucks im Gehäuse. Diese Luftdruckänderung übet eine Rückstellkraft auf die Membran aus, die einen wesentlichen Einfluss auf die Übertragungseigenschaft des Lautsprechersystems hat.

Dieses Skript soll einen kleinen Einstieg in die Konstruktion von Lautsprechergehäusen geben. Aufgrund der begrenzten Zeit der Vorlesung wird hier nur auf dynamische Lautsprecher in geschlossenen Gehäusen eingegangen. Zusätzlich liegt der Fokus auf dem unteren Ende des Frequenzganges.

Eine gute Zusammenfassung aus der damaligen Zeit zu der Theorie von geschlossenen Lautsprechern findet sich in den Artikeln von R. Small [1, 2, 3]. Die hier behandelten Themen stellen im Wesentlichen ein Extrakt dieser Artikel dar. Als weitere Quellen seien hier zum einen das Buch von V. Dickason [4] empfohlen, welches alle wichtigen Themen rund um den Lautsprecher abdeckt. Zum anderen sei auf das Büchlein von J. Panzer [5] verwiesen, der sich auf die Wiedergabeeingenschaften von Basslautsprechern konzentriert.

2 Der Lautsprecher als Filter

Ein Lautsprecher hat die Aufgabe, elektrische Signale in akustische Signale umzuwandeln. Dabei wird, von exotischen Ausnahmen abgesehen, das elektrische Signal zunächst in eine mechanische Schwingung in einem Festkörper gewandelt, die dann in einem

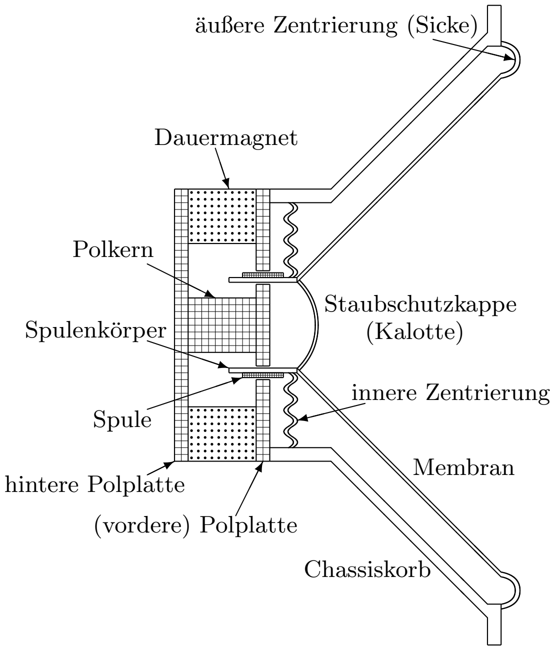

Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau eines dynamischen Lautsprecherchassis

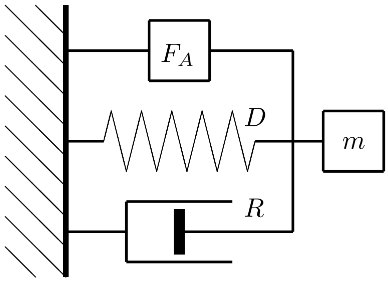

Abbildung 2: Die Elemente eines gedämpften Schwingkreises mit Antrieb.

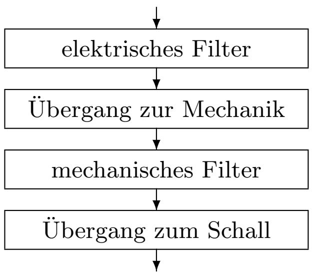

Abbildung 3: Vom Eingangssignal zum Schall in vier Schritten.

zweiten Schritt an die umgebende Luft übertragen wird. Am weitaus häufigsten wird dabei der elektrodynamische Lautsprecher verwendet, auf den in diesem Kapitel ausschließlich eingegangen wird.

In einem elektrodynamischen Lautsprecherchassis finden wir alle Komponenten eines angetriebenen, gedämpften Schwingkreises. Allgemeiner ausgedrückt handelt es sich um ein Filter zweiter Ordnung. Wird dieses Chassis in ein geschlossenes Gehäuse eingebaut, so verändern sich nur die Parameter des Filters, nicht dessen Ordnung. (Auf ventilierte Gehäuse oder Passivmembranen etc., welche die Ordnung des Filters erhöhen, wird hier nicht eingegangen.) Der Schwingkreis setzt sich aus folgenden Elementen zusammen:

1. Die innere und äußere Zentrierung, sowie der Luftdruck im Lautsprechergehäuse erzeugen die nötige *Rückstellkraft*.

2. Die Membran ist zusammen mit der Spule, dem Spulenkörper und Teilen der inneren und äußeren Zentrierung, sowie Teilen der Umgebungsluft die schwingende *Masse*.

3. Die beiden Zentrierungen, die umgebende Luft, als auch ggf. die Dämmwatte im Lautsprechergehäuse erzeugen Verluste, die zu der *Dämpfung* führen.

4. Schließlich, die elektrische Spule stellt zusammen mit dem Dauermagnet und den Magnetpolen den *Antrieb* dar.

3 Entwicklung der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion gibt an, wie der Lautsprecher die elektrischen Signale in Schall umwandelt. Das Signal durchläuft dabei vier Phasen (siehe Abbildung 3): Zunächst finden wir elektrische Komponenten wie Kabelwiderstände und Spuleninduktivität. Danach wird das elektrische Signal in ein mechanisches umgewandelt. Als drittes finden wir einen mechanischen Schwingkreis, der wieder einen Einfluss auf das Signal hat. Schließlich findet ein Übergang der mechanischen Schwingung der Lautsprechermembran in Schallwellen statt.

Im Folgenden gehen wir zunächst auf die vier Teile der Übertragungsfunktion ein, bevor wir sie dann zusammenfügen.

3.1 Elektrisches Filter

Heute werden Lautsprecher üblicherweise mit Spannungsquellen angesteuert. Das heißt, das gewünschte Signal findet sich in der Spannung des Verstärkers,

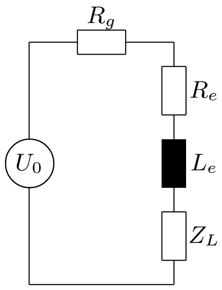

Abbildung 4: Elektrisches Netzwerk eines Lautsprechers.

U_0, wieder. In Abbildung 4 ist das vereinfachte elektrische Netzwerk eines Lautsprechers dargestellt. Der Innenwiderstand des Verstärkers und die Kabelwiderstände sind in dem Generatorwiderstand, R_g, zusammengefasst. Im Lautsprecher finden wir den Ohmschen Widerstand, R_e, und die Induktivität, L_e, der Spule. Schließlich spiegelt der komplexe Widerstand, Z_L, den rückgekoppelten mechanischen Teil des Lautsprechers wieder.

Um die Spannung an dem komplexen Wiederstand Z_L zu ermitteln, wenden wir das aus der Elektrotechnik bekannte Spannungsteilergesetz an:

$$\frac{U_L}{U_0} = \frac{Z_L}{R_g + R_e + i\omega L_e + Z_L}$$

In unseren Betrachtungen geht es um den unteren Frequenzbereich der Übertragungsfunktion. In diesem Frequenzbereich ist der Blindwiderstand der Spuleninduktivität i.A. vernachlässigbar klein. Es folgt:

$$\frac{U_L}{U_0} \approx \frac{Z_L}{R_g + R_e + Z_L} = \frac{1}{\frac{R_g+R_e}{Z_L} + 1} \tag{1}$$

3.2 Übergang zur Mechanik

Der Übergang vom elektrischen Signal zum mechanischen Schwingkreis kann mittels der Lorentzkraft bestimmt werden. Mit Q für die Ladung, $\vec{v}$ für die Geschwindigkeit der Ladung und $\vec{B}$ für das Magnetfeld ergibt sich die Lorentzkraft, $\vec{F}$, mit:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

In einem Lautsprecherchassis stehen die drei Vektoren für Kraft, Geschwindigkeit der Elektronen und Magnetfeld alle senkrecht zueinander. Von daher kann die Gleichung skalar gebildet werden:

$$F = QvB$$

3.2.1 Wirkung des Stroms auf die Kraft

Das Magnetfeld ergibt sich aus dem Aufbau des Chassis. Nicht bekannt ist die Geschwindigkeit der Elektronen, v_e, noch die Gesamtladung (die Anzahl) der Elektronen, Q. Das Produkt aus Ladung und Geschwindigkeit entspricht aber dem Produkt aus Drahtlänge, l, und Stromstärke, I, im Draht.

$$Q \cdot v_e = I \cdot l$$

Es folgt für die Lorentzkraft:

$$F = I \cdot Bl \tag{2}$$

Der Bl-Faktor wird in ausführlichen Datenblättern für Lautsprecherchassis angegeben.

3.2.2 Wirkung der Bewegung auf die Spannung

Wieder arbeiten wir mit der Lorentzkraft, nur dass es sich bei der Geschwindigkeit v jetzt um die Geschwindigkeit der Spule als Ganzes, und damit auch der Geschwindigkeit der Membran handelt. Die entstehende Kraft wirkt sich auf die freien Elektronen im Draht aus, die sich beginnen zu verschieben. Die Elektronen werden im Draht soweit verschoben, bis das resultierende elektrische Feld die Lorentzkraft kompensiert:

$$\begin{aligned} F_E &= F_L \\ \frac{U}{l}e &= evB \\ U &= v \cdot Bl \end{aligned} \tag{3}$$

Wieder taucht der Bl-Faktor auf, der den Datenblättern entnommen werden kann.

3.3 Mechanisches Filter

Wir haben es hier mit einem mechanischen, angetriebenen und gedämpften Schwingkreis zu tun. Vier Kräfte wirken zusammen: Rückstellkraft, F_R, Verlustkraft, F_V, Trägheitskraft, F_T, und Antriebskraft, F. Im Folgenden werden die Formeln für die drei ersten der vier Kräfte zunächst allgemein, dann mit der Membrangeschwindigkeit, $v(t)$, und schließlich für harmonische Schwingungen ausgedrückt.

$$\begin{aligned} F_R &= -\frac{1}{C}x(t) = -\frac{1}{C}\int v(t)dt = -\frac{1}{i\omega C}v(t) \\ F_V &= -Rv(t) = -Rv(t) = -Rv(t) \\ F_T &= -ma(t) = -m\frac{dv(t)}{dt} = -i\omega mv(t) \end{aligned}$$

Zusammen mit der Antriebskraft F muss die Summe aller Kräfte null ergeben. (Die Angabe der Zeitvariable, t, wurde weggelassen.)

$$\begin{aligned} F &= -F_R - F_V - F_T \\ F &= \frac{1}{i\omega C} v + Rv + i\omega m v \\ \frac{v}{F} &= \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + R + i\omega m} \end{aligned} \tag{4}$$

3.4 Übergang zum Schall

Physikalisch ausgedrückt haben wir es bei einem Lautsprecher mit einer kreisförmigen Kolbenmembran zu tun. Für große Abstände zum Lautsprecher, r_0, lässt sich der Scheitelwert des Schalldrucks, $\hat{p}$, mit der Besselfunktion erster Ordnung, J_1, ausdrücken. Mit ρ_0 für die Dichte der Luft, a für den Radius der Membran und ϑ für den Winkel zwischen Betrachtungsrichtung und Flächennormale der Membran gilt:

$$\hat{p} = \frac{\rho_0 \omega \hat{v} a^2}{r_0} \left| \frac{J_1 \left(\frac{\omega}{c} a \sin\vartheta \right)}{\frac{\omega}{c} a \sin\vartheta} \right|$$

Ist die Wellenlänge deutlich größer als der Umfang der Membran, so breiten sich die Wellen kugelförmig aus, und die Gleichung reduziert sich zu:

$$\hat{p} = \frac{\rho_0 \omega \hat{v} a^2}{2 r_0} \tag{5}$$

Es können für den Schalldruck, $\hat{p}$, und die Schallschnelle, $\hat{v}$, auch die Effektivwerte, $\tilde{p}$ und $\tilde{v}$, verwendet werden.

Zur Bestimmung des absoluten Wirkungsgrads wird die abgegebene akustische Leistung, P_{ak}, benötigt. Für Wellenlängen größer als der Membranumfang ergibt sich die akustische Leistung mit:

$$P_{ak} = \frac{\pi}{4c} \rho_0 a^4 \omega^2 \hat{v}^2 \tag{6}$$

3.5 Zusammenfassung der Funktion

Wir beginnen mit Gleichung (1) und ersetzen gemäß Gleichung (3) die Spannung an dem komplexen Widerstand, U_L, durch die Schnelle der Membran, v:

$$\begin{aligned} \frac{v}{U_0} &= \frac{1}{Bl} \cdot \frac{1}{\frac{R_g + R_e}{Z_L} + 1} \\ &= \frac{1}{Bl(R_g + R_e)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{R_g + R_e}} \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (2) und (3) wandeln wir Z_L um und setzen sie in die Übertragungsfunktion ein:

$$Z_L = \frac{U_L}{I_L} = \frac{vBl}{\frac{F}{Bl}} = (Bl)^2 \frac{v}{F}$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{U_0} &= \frac{1}{Bl(R_g + R_e)} \cdot \frac{1}{\frac{F}{v(Bl)^2} + \frac{1}{R_g + R_e}} \\ &= \frac{Bl}{R_g + R_e} \cdot \frac{1}{\frac{F}{v} + \frac{(Bl)^2}{R_g + R_e}} \end{aligned}$$

Als nächstes wird Gleichung (4) für den mechanischen Schwingkreis eingefügt:

$$\begin{aligned} \frac{v}{U_0} &= \frac{Bl}{R_g + R_e} \cdot \frac{1}{\frac{1}{i\omega C} + R + i\omega m + \frac{(Bl)^2}{R_g + R_e}} \\ &= \frac{Bl}{R_g + R_e} \cdot \frac{i\omega C}{1 + i\omega \left(R + \frac{(Bl)^2}{R_g + R_e} \right) C + (i\omega)^2 mC} \end{aligned}$$

Jetzt wird die Kreisfrequenz, ω, auf die Resonanzfrequenz, $\omega_0 = 1/\sqrt{mC}$, normiert, und wir führen die Güte des Lautsprechers, Q, ein:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{mC}$$

$$Q = \frac{1}{R + \frac{(Bl)^2}{R_g + R_e}} \sqrt{\frac{m}{C}}$$

$$\frac{v}{U_0} = \frac{Bl}{R_g + R_e} \cdot \frac{i\Omega\omega_0 C}{1 + i\Omega \frac{1}{Q} + (i\Omega)^2} \tag{7}$$

Für die Auslenkung der Membran, X, muss die Geschwindigkeit der Membran, v, durch die imaginäre Kreisfrequenz, $i\omega = i\Omega/\omega_0$, dividiert werden.

$$\frac{X}{U_0} = \frac{BlC}{R_g + R_e} \cdot \frac{1}{1 + i\Omega \frac{1}{Q} + (i\Omega)^2} \tag{8}$$

Die gewonnene Gleichung (8) für die Membranauslenkung entspricht einem Tiefpass zweiter Ordnung. Das heißt, oberhalb des Übergangsbereichs nimmt die Auslenkung mit steigender Frequenz ab.

Nun wollen wir aus der Schnelle der Membran den Schalldruck mittels Gleichung (5) bestimmen:

$$\frac{p}{U_0} = \frac{\rho_0 Bl \omega_0^2 C a^2}{2 r_0 (R_g + R_e)} \cdot \frac{(i\Omega)^2}{1 + i\Omega \frac{1}{Q} + (i\Omega)^2} \tag{9}$$

Die Gleichung lässt sich in zwei Teile unterteilen. Der eine ist über die Frequenz konstant, der andere ist eine Funktion der Frequenz. Für unsere Fragestellung konzentrieren wir uns auf den von der Frequenz abhängigen Teil der Gleichung.

$$A(\Omega) = \frac{(i\Omega)^2}{1 + i\Omega\frac{1}{Q} + (i\Omega)^2} \tag{10}$$

Es ergibt sich ein Hochpass zweiter Ordnung, auf den im folgenden Abschnitt weiter eingegangen wird.

4 Hochpass zweiter Ordnung

Ein Filter zweiter Ordnung kann als Hochpass, Tiefpass, Bandpass oder Bandsperre auftreten. Bei einem Lautsprecher haben wir es im unteren Frequenzbereich mit einem Hochpass zu tun: Nur die Frequenzen oberhalb einer gewissen Grenze werden übertragen. Frequenzen unterhalb dieser Grenze werden stark gedämpft.

Stellen Sie sich einen Ihnen unbekannten Lautsprecher vor. Sie geben vorne ein elektrisches Signal hinein, und messen am Ausgang das akustische Ergebnis. Nehmen wir an, wir legen zu Messzwecken nacheinander Sinussignale mit unterschiedlichen Frequenzen und gleicher Amplitude an, dann interessiert zunächst die akustische Amplitude, dann aber auch die Phasenlage (bzw. die Laufzeit) von Ausgangs- zu Eingangssignal. Man spricht vom Amplituden- und Phasengang. Wir legen hier unseren Fokus auf den Amplitudengang.

In diesem Abschnitt betrachten wir allgemein das Verhalten eines Hochpasses zweiter Ordnung. Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Übertragungsfunktion (10) spiegelt das lineare Übertragungsverhalten des Filters komplex wieder. *Linear* heißt, dass sie das Verhalten einer linearen Größe wie Schalldruck, Schallschnelle, -ausschalg, aber auch Spannung oder Strom beschreibt. Um den nicht-komplexen Amplitudengang zu ermitteln, muss von der Übertragungsfunktion der Betrag und das Quadrat gebildet werden. Das geschieht am einfachsten, indem die Übertragungsfunktion mit der konjugiert komplexen Übertragungsfunktion multipliziert wird.

$$\begin{aligned}
|A(\Omega)|^2 &= A(\Omega) \cdot A^*(\Omega) \\
&= \Re^2(A(i\Omega)) + \Im^2(A(i\Omega)) \\
&= \frac{\Omega^4}{(1 - \Omega^2 + \frac{i}{Q^2}\Omega) \cdot (1 - \Omega^2 - \frac{i}{Q^2}\Omega)} \\
|A(\Omega)|^2 &= \frac{\Omega^4}{\Omega^4 + \Omega^2(\frac{1}{Q^2} - 2) + 1} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Phasenganges eliminieren wir zunächst den Imaginärteil aus dem Nenner der Übertragungsfunktion in dem wir mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitern.

$$\begin{aligned}
A(\Omega) &= \frac{-\Omega^2}{1 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{Q}} \cdot \frac{1 - \Omega^2 - \frac{i\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 - \frac{i\Omega}{Q}} \\
&= \frac{\Omega^4 - \Omega^2 + \frac{i\Omega^3}{Q}}{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}
\end{aligned}$$

Nun bilden wir den Arcustangens aus dem Quotienten von Imaginärteil und Realteil der Übertragungsfunktion.

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{\Im(A(i\Omega))}{\Re(A(i\Omega))} = \frac{\frac{\frac{i\Omega^3}{Q}}{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}{\frac{\Omega^4 - \Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} = \frac{\frac{1}{Q}\Omega}{\Omega^2 - 1} \\
\varphi(\Omega) &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\Omega}{\Omega^2 - 1}\right) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Laufzeit muss die Phase durch die Kreisfrequenz dividiert werden:

$$t_d(\Omega) = \frac{1}{\Omega} \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\Omega}{\Omega^2 - 1}\right) \tag{13}$$

Als untere Grenzfrequenz definiert man den Punkt, bei dem die Amplitude auf die Hälfte gesunken ist. Eine Halbierung der Amplitude bedeutet eine Pegelabnahme um 3 dB. Daher wird die untere Grenzfrequenz gerne mit dem Formelbuchstaben f_3 belegt. Für unsere Betrachtung verwenden wir die normierte Kreisfrequenz, Ω_3. Für die Berechnung setzen wir den Amplitudengang (11) gleich 0,5: $|A(\Omega_3)|^2 = 0,5$. (Die positiven Vorzeichen vor den Wurzeln ergeben sich dadurch, dass hier zum einen nur mit positiven Frequenzen gearbeitet wird, und zum anderen, dass die Werte unter der Wurzel immer positiv sein müssen.) Es folgt:

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1 + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2}}$$

Zur Ermittlung der Frequenz, Ω_{Lpeak}, bei der der maximale Schalldruck entsteht, muss die erste Ableitung des Amplitudenganges (11) gleich null gesetzt werden. Wird diese Frequenz wieder in den Amplitudengang eingesetzt, so kann die Höhe des Peaks bestimmt werden:

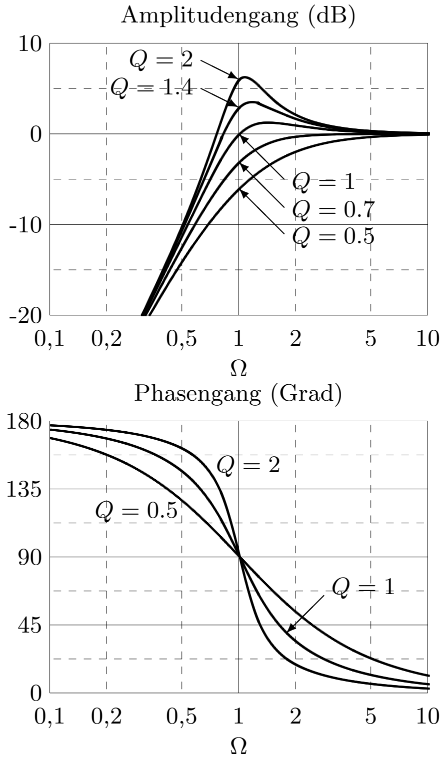

Abbildung 5: Amplituden- und Phasengang eines Hochpassfilters 2. Ordnung.

$$\Omega_{Lpeak} = \Omega(L_{peak}) = \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{1}{Q^2}}}$$

$$L_{peak} = 10 \text{ dB } \log \frac{4Q^4}{4Q^2 - 1}$$

Bei der Konstruktion eines Lautsprechers muss darauf geachtet werden, dass sich nicht ein zu hoher Membranhub, X, einstellt. Wird der in den Datenblättern angegebene Höchstwert, X_{max}, überschritten, so treten ungewollte Verzerrungen auf. Um das zu prüfen, muss ermittelt werden, bei welcher Frequenz der maximale Hub entsteht.

Der Membranhub folgt einem Tiefpass zweiter Ordnung. Die Frequenz, bei der der Membranhub am höchsten ist, ergibt sich, indem die erste Ableitung des Betrags von Gleichung (8) für den Membranhub auf null gesetzt wird. Diese Frequenz muss dann wieder in die Gleichung für den Membranhub (8) eingesetzt werden, um den Betrag des Membranhubs zu gewinnen. Wir normieren die Gleichung auf den Membranhub bei der Frequenz null.

$$\omega_{Xpeak} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Q	Ω_3	Ω_{Lpeak}	L_{peak}	Ω_{Xpeak}	X_{peak}/X_0
0,5	1,554	-	-	0	1
0,7	1,010	-	-	0	1
1	0,786	1,414	1,249	0,707	1,155
1,4	0,709	1,159	3,515	0,863	1,499
2	0,674	1,069	6,301	0,935	2,066

Tabelle 1: Einige Kenngrößen eines Hochpasses 2. Ordnung.

$$\frac{X_{peak}}{X_0} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

5 Lautsprecher in gechlossenen Gehäusen

In diesem Abschnitt werden die im Lautsprecherbau inzwischen üblichen *Thiele Small* Parameter verwendet. Die für die Berechnung benötigten Daten werden normalerweise zusammen mit dem Lautsprechersystem geliefert. Für eine genaue Abstimmung eines Lautsprechergehäuses ist es allerdings ratsam, einige der Parameter nachzumessen [4, 5]. Außerdem ist in den ersten Betriebsstunden eine leichte Verschiebung einiger Parameter zu beobachten, so dass der Betrieb des Lautsprechers über einige Stunden mit einer sichtbaren Auslenkung der Membran sinnvoll sein kann.

In diesem Abschnitt werden folgende Begriffe verwendet:

- *(Lautsprecher-) Treiber*: Chassis mit Magnet, Korb, Spule, Membran etc.
- *(Lautsprecher-) Gehäuse*: Lautsprecherbox ohne Treiber
- *(Lautsprecher-) Box*: Gehäuse mit Treiber

5.1 Bestimmung der Gesamtgüte Q_{tc} und der Resonanzfrequenz f_c

Im Allgemeinen werden bei einem Lautsprechertreiber die mechanische und die elektrische Güte, Q_{ms} und Q_{es}, getrennt angegeben. Sie spiegeln die elektrischen und die mechanischen Verluste des Treibers wieder. Hinter diesen Güten stecken die folgenden Formeln:

$$Q_{ms} = \frac{1}{R_{ms}} \sqrt{\frac{M_{ms}}{C_{ms}}}$$

$$Q_{es} = \frac{1}{\frac{(Bl)^2}{R_e}} \sqrt{\frac{M_{ms}}{C_{ms}}} = \frac{R_e}{(Bl)^2} \sqrt{\frac{M_{ms}}{C_{ms}}}$$

Als erstes berücksichtigen wir, das vor und hinter der Membran ein Teil der Luftmasse als ganzes mitschwingt. Dadurch erhöht sich die schwingende Masse M_{ms}, was durch den Faktor m_b angedeutet wird. Es gilt:

$$m = \frac{M_{ms}}{{m_b}^2}$$

Wird nur die Luftlast berücksichtigt, so ergibt sich für m_b ein Wert von ca. 0,94. Wird das Lautsprechergehäuse mit Dämmmaterial gefüllt, so nimmt m_b einen Wert von ca. 0,9 an. Mit diesem Korrekturfaktor werden die korrigierten Güten, Q_{msb} und Q_{esb}, bestimmt:

$$Q_{msb} = \frac{1}{R_{ms}} \sqrt{\frac{M_{ms}}{{m_b}^2 C_{ms}}} = \frac{Q_{ms}}{m_b}$$

$$Q_{esb} = \frac{R_e}{(Bl)^2} \sqrt{\frac{M_{ms}}{{m_b}^2 C_{ms}}} = \frac{Q_{es}}{m_b}$$

Die Innenwiderstände des Verstärkers, der Kabel und der Frequenzweiche, zusammengefasst in dem Generatorwiderstand R_g, beeinflussen die elektrische Güte. Sie müssen zum Spulenwiderstand R_e addiert werden:

$$\begin{aligned} Q_{esbg} &= \frac{R_e + R_g}{(Bl)^2} \sqrt{\frac{m}{C_{ms}}} \\ &= \frac{R_e + R_g}{R_e} \cdot \frac{R_e}{(Bl)^2} \sqrt{\frac{m}{C_{ms}}} \\ &= \left(1 + \frac{R_g}{R_e}\right) \cdot Q_{esb} \end{aligned}$$

Als nächstes berücksichtigen wir, dass sich der Lautsprechertreiber in einem Gehäuse mit dem Volumen V_b (Volumen Box) befindet. Dieses Volumen beeinflusst den Lautsprechertreiber wie eine zusätzliche Feder, welche auf die Membran wirkt. Dadurch verändert sich die Rückstellkraft des Lautsprechertreibers, was sich wiederum auf beide Güten auswirkt.

Wenn das Lautsprechergehäuse mit Dämmmaterial gefüllt ist, erscheint dem Treiber das Volumen etwas größer. Es wird der Faktor u eingeführt:

$$V_{ab} = u \cdot V_b$$

Die Werte für u reichen von 1 (ohne Dämmung) bis 1,4 (spezielles Dämmmaterial).

Der Betrag der resultierenden Nachgiebigkeit, C, aufgrund des Gehäusevolumens, V, ergibt sich aus der Fläche der Membran, s_D, und dem Luftdruck, p_0.

$$C = \frac{V}{p_0 {s_D}^2}$$

Genauso kann die Nachgiebigkeit, C, durch ein Äquivalentvolumen, V, angegeben werden:

$$V = C p_0 {s_D}^2$$

Im Lautsprecherbau werden die Äquivalentvolumina gegenüber den Nachgiebigkeiten bevorzugt. So wird die Nachgiebigkeit der Membranaufhängung, C_{ms}, durch das Äquivalentvolumen, V_{as}, ausgedrückt.

Um den Einfluss von Membranaufhängung und Gehäusevolumen zusammenzufassen, müssen die Reziprokwerte addiert werden. Das gilt für beide, die Nachgiebigkeit, C, und das Äquivalentvolumen, V. Es gilt allgemein:

$$V_g = \frac{1}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

$$C_g = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Dieser Zusammenhang kann nun konsequent auf die mechanische und elektrische Güte angewendet werden. Bei der Verwendung von Dämmmaterial treten zusätzliche Verluste auf, die zu einer Erhöhung der Reibungskonstante R führen. Eine genaue Bestimmung der Veränderung ist schwierig, als gute Näherung dient der Faktor 2:

$$\begin{aligned} Q_{ec} &= Q_{esbg} \sqrt{\frac{V_{as}}{V_{ab}} + 1} \\ Q_{mc} &= Q_{msb} \sqrt{\frac{V_{as}}{V_{ab}} + 1} \quad \text{(ohne Dämmmaterial)} \\ Q_{mc} &= \frac{Q_{msb}}{2} \sqrt{\frac{V_{as}}{V_{ab}} + 1} \quad \text{(mit Dämmmaterial)} \end{aligned}$$

Nun sind die beiden Güten so vorbereitet, dass sie zur Gesamtgüte Q_{tc} zusammengefasst werden können. Es müssen wieder die Kehrwerte addiert werden:

$$Q_{tc} = \frac{1}{\frac{1}{Q_{mc}} + \frac{1}{Q_{ec}}} = \frac{Q_{mc} \cdot Q_{ec}}{Q_{mc} + Q_{ec}}$$

Die Resonanzfrequenz muss in zwei Schritten angepasst werden. Zunächst wird wieder der Faktor m_b

berücksichtigt. Eine Veränderung der Masse bedeutet auch eine Verschiebung der Resonanzfrequenz:

$$
\begin{aligned}
f_{sb} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{mC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{M_{ms}}{m_b^2}C}} \\
&= \frac{m_b}{2\pi\sqrt{M_{ms}C}} = m_b f_s
\end{aligned}
$$

In dem zweiten Schritt berücksichtigen wir wieder den Einfluss des Lautsprechervolumens auf die Rückstellkraft. Wir verwenden das bereits korrigierte Volumen Vab:

$$f_c = f_{sb}\sqrt{\frac{V_{as}}{V_{ab}} + 1}$$

5.2 Berechnung eines Gehäuses

Für die Berechnung eines Lautsprechergehäuses müssen einige Angaben bekannt sein. Vom Treiber müssen f_s, Q_{ms}, Q_{es}, V_{as} und R_e bekannt sein. Es muss entscheiden werden, ob mit Dämmmaterial gearbeitet wird, und welcher Wert für die Gesamtgüte Q_{tc} erzielt werden soll. Des Weiteren muss für den Generatorwiderstand, R_g, ein Wert angenommen werden, z. B. 1Ω.

Nun werden nach den angegebenen Gleichungen die Güten Q_{msb} und Q_{esbg} bestimmt. Dann fassen wir die beiden Güten schon zusammen, bevor wir den Einfluss des Gehäusevolumens einbeziehen. Als Zwischenwert führen wir die Güte Q_{ts} ein:

$$Q_{ts} = \frac{Q_{msb} \cdot Q_{esbg}}{Q_{msb} + Q_{esbg}} \quad \text{(ohne Dämmmaterial)}$$

$$Q_{ts} = \frac{Q_{msb} \cdot Q_{esbg}}{Q_{msb} + 2Q_{esbg}} \quad \text{(mit Dämmmaterial)}$$

Die gesamte Güte des eingebauten Treibers ergibt sich mit dem uns bekannten Faktor:

$$Q_{tc} = Q_{ts}\sqrt{\frac{V_{as}}{V_{ab}} + 1}$$

Diese Formel lässt sich nach dem korrigierten Gehäusevolumen umstellen:

$$V_{ab} = \frac{V_{as}}{\left(\frac{Q_{tc}}{Q_{ts}}\right)^2 - 1}$$

5.3 Ein Beispiel

Wir gehen von einem Lautsprecher mit folgenden Daten aus:

$f_s = 30$ Hz, $Q_{ms} = 4,51$, $Q_{es} = 0,35$, $V_{as} = 29$ l, $R_e = 6\ \Omega$

Wir rechnen mit gutem Dämmmaterial ($m_b = 0,9$ und $u = 1,4$) und wollen eine Gesamtgüte von $Q_{tc} = 0,7$ erreichen. Für Kabel und Verstärker setzen wir einen Widerstand von 1 Ω an.

Wir rechnen:

$$Q_{msb} = \frac{Q_{ms}}{m_b} = \frac{4,51}{0,9} = 5,01$$

$$Q_{esb} = \frac{Q_{es}}{m_b} = \frac{0,35}{0,9} = 0,389$$

$$Q_{esbg} = \left(1 + \frac{R_g}{R_e}\right) \cdot Q_{esb} = \left(1 + \frac{1\Omega}{6\Omega}\right) \cdot 0,389 = 0,454$$

$$
\begin{aligned}
Q_{ts} &= \frac{Q_{msb} \cdot Q_{esbg}}{Q_{msb} + 2Q_{esbg}} = \frac{5,01 \cdot 0,454}{5,01 + 2 \cdot 0,454} \\
&= 0,384 \qquad \text{(mit Dämmmaterial)}
\end{aligned}
$$

$$V_{ab} = \frac{V_{as}}{\left(\frac{Q_{tc}}{Q_{ts}}\right)^2 - 1} = \frac{29\ \text{l}}{\left(\frac{0,7}{0,384}\right)^2 - 1} = 12,5\ \text{l}$$

Und schließlich ergibt sich das Nettovolumen von:

$$V_b = \frac{V_{ab}}{u} = \frac{12,5\ \text{l}}{1,4} = 8,93\ \text{l}$$

Falls der Lautsprecher ohne Dämmmaterial gebaut werden soll, ergibt sich ein Nettovolumen von 13,9 l.

Literatur

[1] R.H. Small, *Direct-Radiator Loudspeaker System Analysis*, JAES vol. 20, p. 383-395 (**Jun. 1972**)

[2] R.H. Small, *Closed-Box Loudspeaker Systems Part I: Analysis*, JAES vol. 20, p. 798-808 (**Dec. 1972**)

[3] R.H. Small, *Closed-Box Loudspeaker Systems Part II: Synthesis*, JAES vol. 21, p. 11-18 (**Jan./Feb. 1973**)

[4] V. Dickason, *Lautsprecherbau*, Elektor-Verlag (**1996**)

[5] J. Panzer, *Konstruktion von Basslautsprechergehäusen*, Franzis-Verlag (**1994**)

[6] M. Vorländer, *Technische Akustik I*, Institut für technische Akustik, RWTH Aachen, (**2003**), Download vom WWW